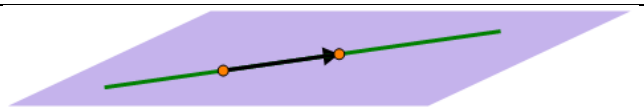


Projekt 7.17 Vektorer i 3d og analytisk rumgeometri

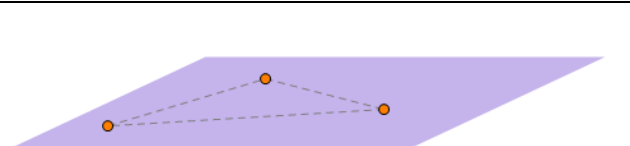
(Dette er en bearbejdet udgave af kapitel 5 i *Hvad er matematik? A*. Den indledende fortælling handlede om perspektivgeometri og indeholdt to sætninger. Derfor starter nummereringen her med sætning 3. Materialet lægger op til, at eleverne arbejder selv med materialet, da rumgeometrien og vektorer i 3d er koblet sammen med de tilsvarende ting fra 2d, hvor dette er muligt)

1.1 Linjer og planer & cirkler og kugler

Et af de grundlæggende aksiomer i plangeometri er, at der gennem to punkter går netop én ret linje. Vi vil her kalde den vektor, der forbinder de to punkter for linjens *retningsvektor*.

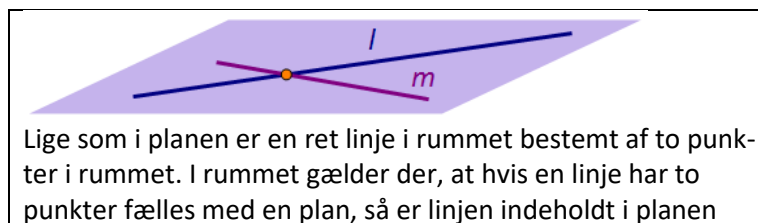


På samme måde er det aksiom for rumgeometri, at der gennem tre punkter, der ikke ligger på linje, går netop én plan. Danner vi to vektorer ud fra de tre punkter, siger vi, at planen er *udspændt* af de to vektorer. Af aksiomet følger, at det er ligegyldigt hvilke vektorer, vi danner ud fra punkterne.

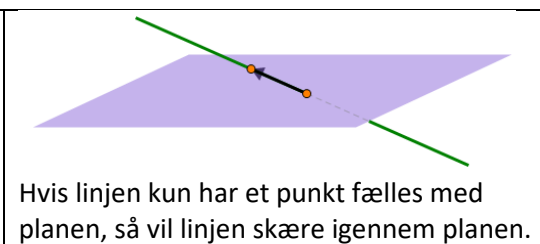


Vi siger, at en vektor er *indeholdt* i en plan, hvis en repræsentant for vektoren er det.

Betragter vi to ikke-parallele vektorer i rummet, så vil vi altid kunne finde en plan, der indeholder begge vektorer, fordi vi kan afsætte repræsentanter for de to vektorer ud fra samme begyndelsespunkt.



Lige som i planen er en ret linje i rummet bestemt af to punkter i rummet. I rummet gælder der, at hvis en linje har to punkter fælles med en plan, så er linjen indeholdt i planen

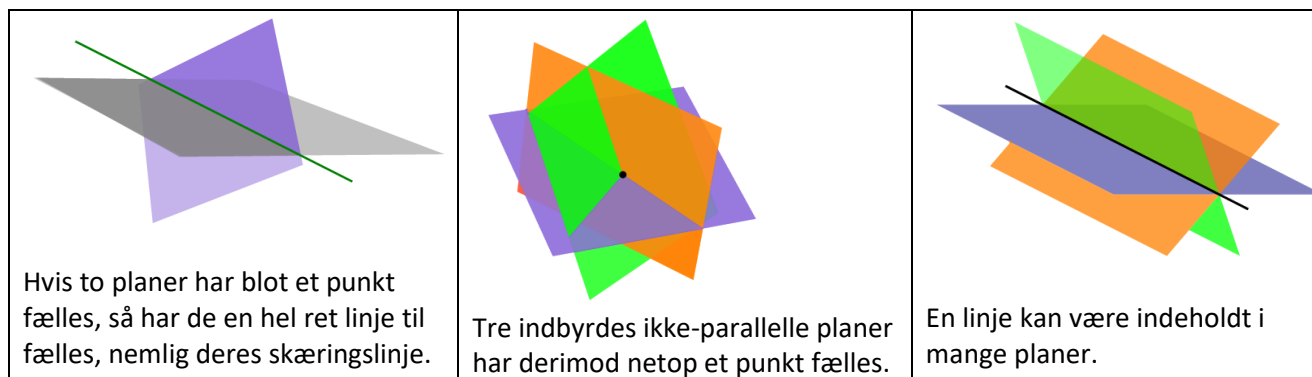


Hvis linjen kun har et punkt fælles med planen, så vil linjen skære igennem planen.

To rette linjer i rummet har enten ét punkt fælles eller ingen. Har linjerne netop ét punkt fælles betyder det, at linjerne er ikke-parallele, og at de begge er indeholdt i den plan, som deres retningsvektorer udspænder sammen med skæringspunktet. Hvis linjerne derimod er parallelle og ligger i samme plan, så har de selvfølgelig ingen fælles punkter.

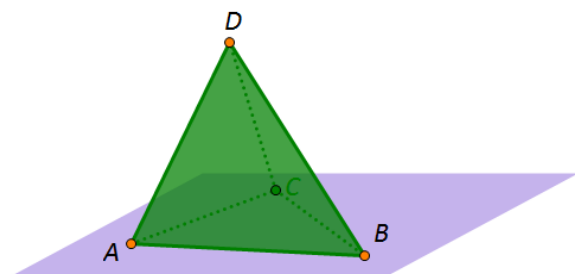
Men linjer i rummet kan også være *vindskæve*, hvilket betyder, at de hverken er parallelle eller ligger i samme plan. Ved at parallelforskyde den ene retningsvektor op til den anden – og omvendt – får vi udspændt to parallelle planer, der indeholder hver sin af de to vindskæve linjer, se figuren.





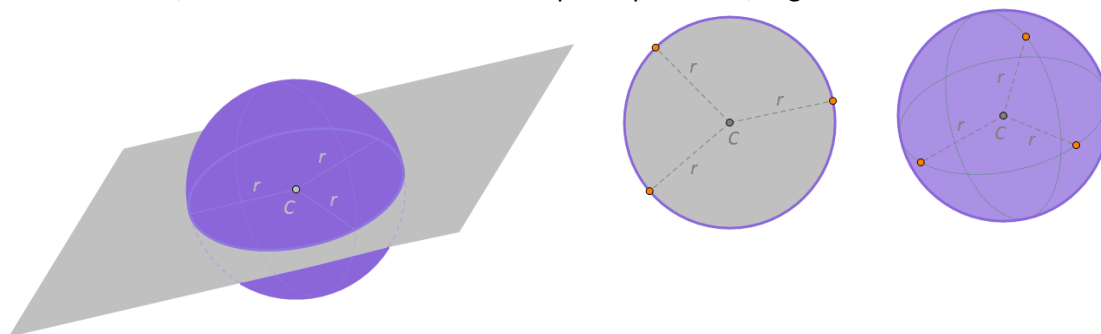
Eksempel: Polyedre

I en plan er givet tre punkter A , B og C , som ikke ligger på samme rette linje, samt et punkt D uden for planen. Linjen gennem A og B og linjen gennem D og C er vindskæve – de ligger i to forskellige planer, fordi der findes ingen plan, der indeholder alle fire punkter.



De tre punkter i planen danner en trekant ABC , som er grundflade i det *tetraeder*, der fremkommer ved at trække linjestykker fra disse tre punkter til punktet D . Man kalder A , B , C og D for tetraederets hjørner. Linjestykkerne, der udgør siderne i de fire trekanter, som tetraederet er opbygget af, kaldes for tetraederets kanter, mens de fire trekanter kaldes tetraederets flader. Tetraederet opfylder *Eulers polyedersætning*: $F - K + H = 2$, dvs. at antallet af flader (F) minus antallet af kanter (K) plus antallet af hjørner (H) er lig med 2. I HEM1 projekt 0.2 er der et materiale om og bevis for Eulers polyedersætning.

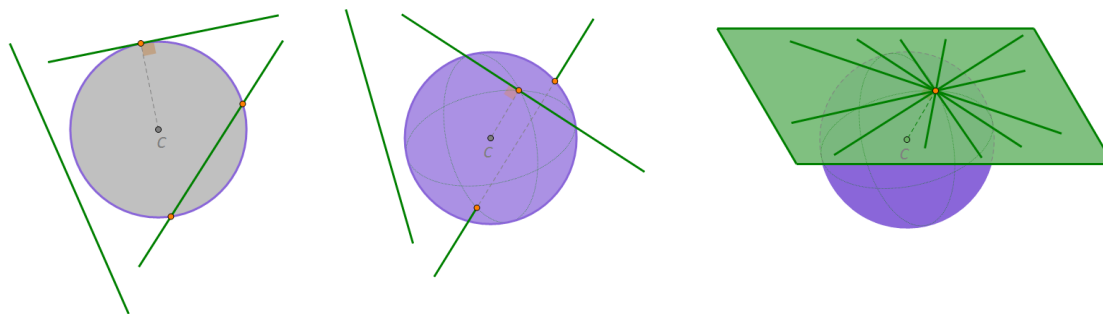
En *cirkel i planen* er defineret som de punkter, der har en afstand på radius r til cirkelns centrum C . Helt analogt her til er en *kugle i rummet* defineret som de punkter i rummet, der har en afstand på radius r til kuglens centrum C . Vi kalder en vektor, der forbinder centrum med et punkt på cirklen/kuglen for en *radiusvektor*.



Skæringskurven for en kugle og en plan er en cirkel – enten en storcirkel (fx ækvator), hvis planen deler kuglen i to halvkugler eller en lillecirkel, hvis planen på anden måde skærer kuglen (planen afskærer en kuglekalot – ”toppen” af en kugle).

Den indbyrdes beliggenhed for en linje og en cirkel i planen (eller kugle i rummet) kan beskrives ved:

1. Linjen ligger uden for cirklen/kuglen, dvs. linjen skærer ikke cirklen/kuglen
2. Linjen er tangent til cirklen/kuglen, dvs. linjen rører cirklen/kuglen i netop ét punkt
3. Linjen går gennem cirklen/kuglen, dvs. linjen har to skæringspunkter med cirklen/kuglen



Bemærkning: En tangent til en cirkel/kugle står altid vinkelret på den linje, der går fra centrum til tangentens *røringspunkt*. En cirkel har netop en tangent i et givet punkt, mens en kugle har mange tangenter i et givet punkt, nemlig alle de linjer, der er indeholdt i kuglens *tangentplan* i røringspunktet!

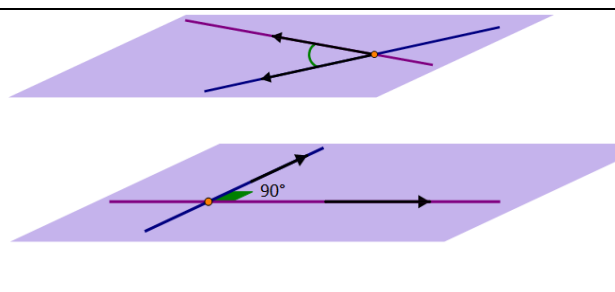
For at kunne afgøre om en linje (plan) tangerer en cirkel (kugle), så har vi brug for en metode til at undersøge, om afstanden fra centrum til linjen (planen) er lig radius.

1.2 Vinkler i plan og rum

Definition: Vinkel mellem vektorer

Afsættes repræsentanter for to vektorer ud fra et fælles punkt, danner de sammen en vinkel, som vi kalder for *vinklen mellem de to vektorer*.

Vinklen mellem to vektorer kan både være spids og stump (men er altid mindre end eller lig med 180°). Danner vektorerne en ret vinkel, siger vi, at de to vektorer er *ortogonale* eller vinkelrette på hinanden.



En ret linje er bestemt ved et punkt på linjen samt en retningsvektor. Vinklen mellem to linjer bestemmes som vinklen mellem linjernes retningsvektorer.

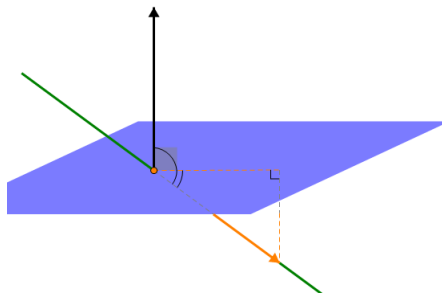
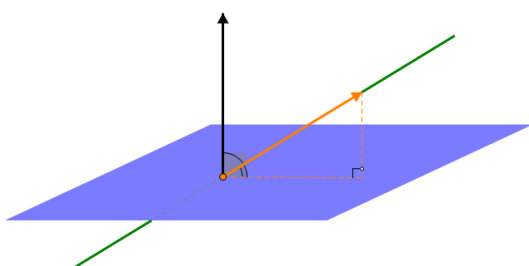


Praxis: Normalvektorer og parallelle linjer og planer

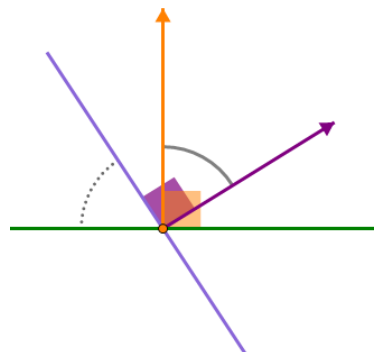
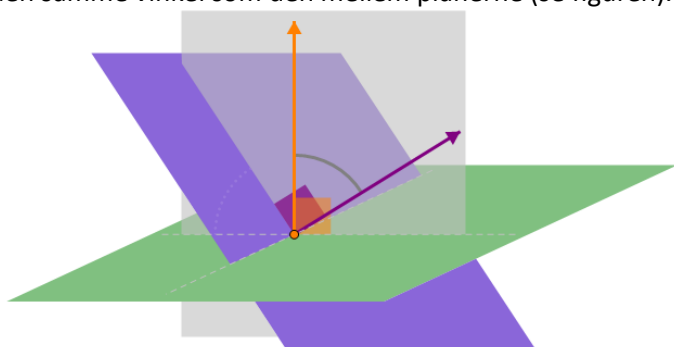
En ret linje n , der står vinkelret på en anden linje l (eller på en plan α , dvs. på alle de linjer, der er indeholdt i α), kaldes en *normal* til l (eller α). Analogt hertil kaldes en vektor, der står vinkelret på en ret linje (eller en plan), for en *normalvektor* til linjen (eller planen). Normalvektoren for en ret linje vil således være vinkelret på enhver retningsvektor for linjen. Det betyder også, at har to linjer samme normal, så er de to linjer parallelle, og tilsvarende har to planer samme normal, så er de to planer parallelle.

Bemærk, at har vi en cirkel (eller en kugle) med en tangentlinje (eller tangentplan), så vil radiusvektor fra centrum til røringspunktet være en normalvektor.

Overvej selv følgende: En plan i rummet kan fastlægges ved ét punkt i planen samt en normalvektor, dvs. en vektor, der står vinkelret på samtlige vektorer i planen. Vinklen mellem en linje og en plan kan derfor bestemmes ud fra vinklen mellem to vektorer, nemlig linjens retningsvektor og planens normalvektor. Da normalvektoren står vinkelret på planen, kan vi ud fra dette nemt bestemme den søgte vinkel (se figuren).

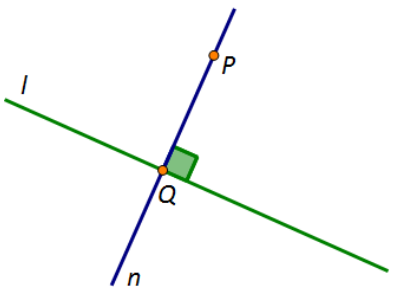
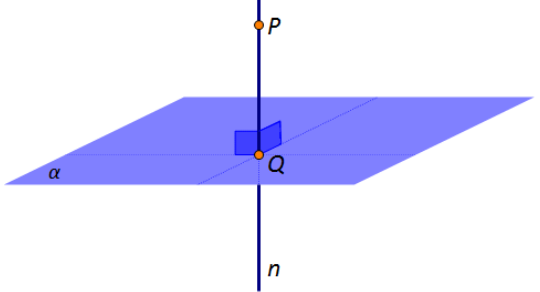


Vinklen mellem to planer kan også bestemmes som vinklen mellem to vektorer, nemlig de to planers normalvektorer. Normalvektorerne står vinkelret på hver deres plan, og derfor vil vinklen mellem normalvektorerne være præcis den samme vinkel som den mellem planerne (se figuren).

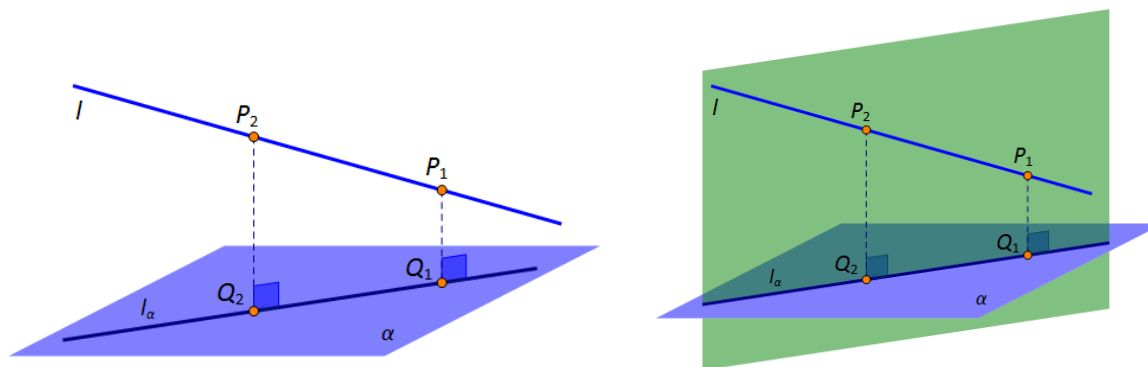


For at bestemme vinkler mellem forskellige objekter i plan og rum har vi altså blot brug for en metode til at bestemme vinkler mellem vektorer.

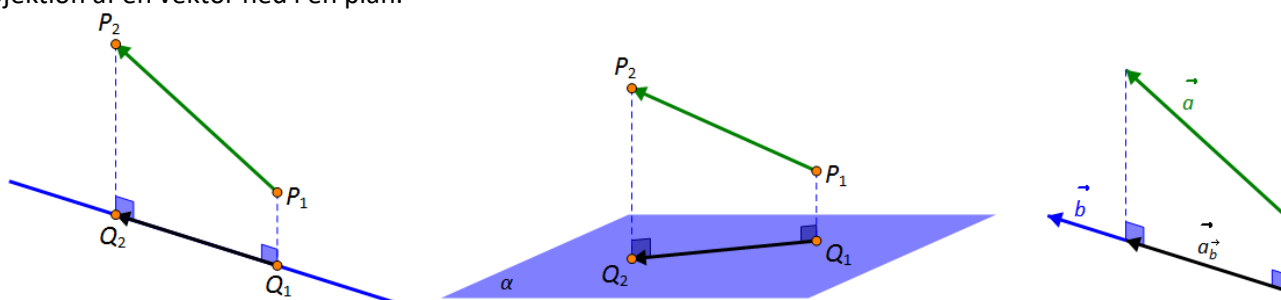
1.3 Projektioner i plan og rum

 Har vi givet et punkt P uden for linjen l i planen, så kaldes <i>skæringspunktet</i> mellem normalen gennem P og linjen for <i>projektion af P på l</i>.	 Har vi givet et punkt P uden for planen α i rummet, så kaldes <i>skæringspunktet</i> mellem normalen gennem P og planen for <i>projektion af P på α</i>.
--	---

Ønsker vi at projicere en hel linje ned i en plan, så svarer dette blot til at projicere hvert enkelt punkt på linjen ned i planen. Kender vi to punkter P_1 og P_2 på linjen, så kan vi projicere disse ned i planen i punkterne Q_1 og Q_2 , og linjens projektion i planen vil da netop være den linje, der går gennem Q_1 og Q_2 . Man kalder også linjens projektion for *sporet* af linjen i planen, og sporet af linjen er også skæringslinjen, for planen α og den plan, der indeholder alle de fire punkter, og dermed de to normaler P_1P_2 og Q_1Q_2 samt linjen.

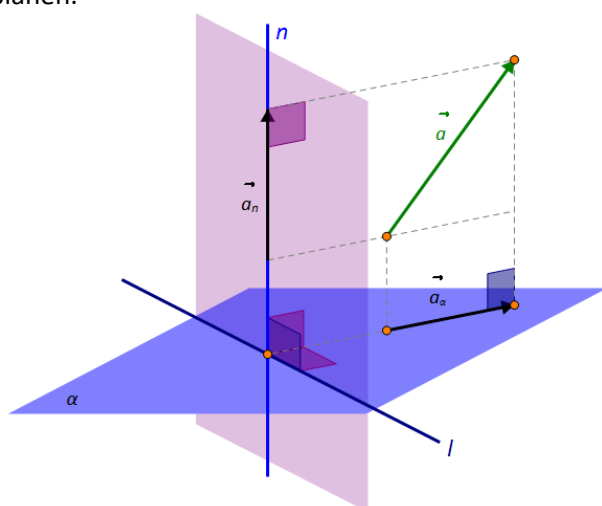


Projektion af en vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ på en linje l kan foregå efter samme princip, hvor man blot vælger at projicere startpunkt P_1 og slutpunkt P_2 for en repræsentant ned på linjen, hvorved man får projektionsvektoren $\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Tilsvarende ved projektion af en vektor ned i en plan.



Projektion af en vektor $\vec{a}$ på en vektor $\vec{b}$ giver os efter samme princip en ny vektor, *projektionsvektoren* $\vec{a}_b$ som vist på figuren. Bemærk, at projektionsvektoren ikke behøver have samme retning og kun sjældent (hvornår? Overvej!) har samme længde som den vektor den projiceres ned på.

Vil vi projicere en vektor ind på en normal til en ret linje eller en normal til en plan, så er princippet det samme. På figuren ses en vektor i rummet samt en ret linje l i en plan α , som således begge har linjen n som normal. Vektorens projektion på normalen er derfor den samme i begge tilfælde. På figuren ses yderligere vektorens projektion ned i planen.



Af ovenstående fremgår, at vi har brug for en metode til at bestemme skæringspunkter mellem objekter.

2. Vektorer i et koordinatsystem

For at kunne udføre beregninger indfører vi nu et koordinatsystem. Et koordinatsystem har udgangspunkt i et punkt O , der kaldes for *origo* (samme ord som origin). O kaldes også ofte for begyndelsespunktet. Til ethvert punkt P i et koordinatsystem knytter vi en vektor, der beskriver punktets beliggenhed i forhold til O .

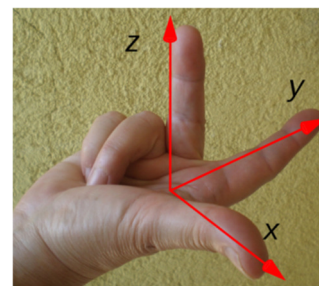
Definition: Stedvektor

En vektor, der går fra koordinatsystemets begyndelsespunkt O ud til et punkt P i planen eller rummet kaldes en *stedvektor* for P og betegnes $\overrightarrow{OP}$.

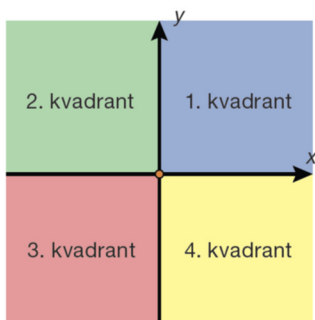
2.1 Det retvinklede tredimensionale koordinatsystem

I planen kender vi allerede det retvinklede (rektangulære) todimensionale koordinatsystem beskrevet ved en x -akse og en y -akse. I rummet indfører vi efter samme princip et retvinklet (rektangulært) tredimensionalt koordinatsystem, som har en tredje akse, nemlig en z -akse, som står vinkelret på de to andre akser i det todimensionale koordinatsystem, således at de tre akser ligger i et indbyrdes *højresystem*.

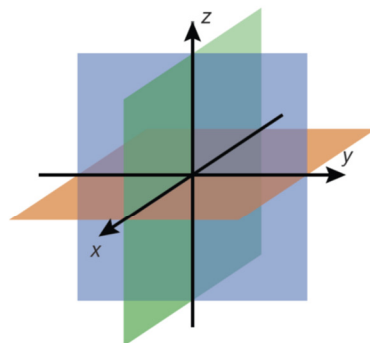
Det betyder, at man med højre hånds tommelfinger, pegefinger og langfinger kan danne en model af koordinatsystemet, således at x -aksen løber langs tommelfingeren, y -aksen langs pegefingeren og z -aksen langs langfingeren



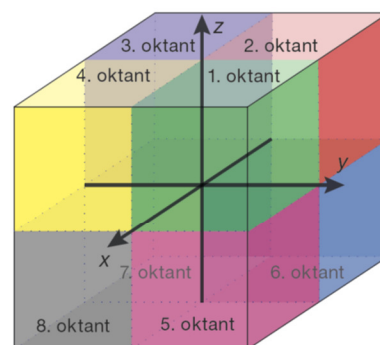
Ligesom det todimensionale koordinatsystems to akser naturligt inddeler planen i fire kvadranter, så inddeler det tredimensionale koordinatsystems tre akseplaner naturligt rummet i 8 oktanter som vist på figuren nedenfor.



Kvadranterne i et 2D-koordinatsystem.



Akseplanerne i et 3D-koordinatsystem.

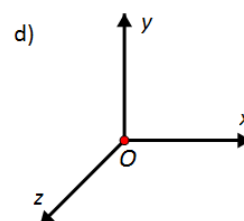
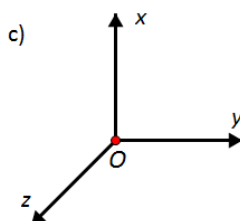
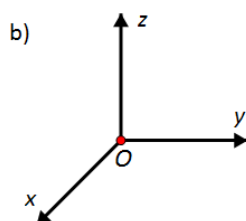
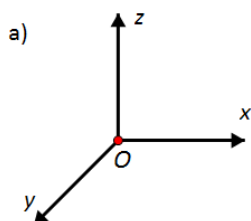


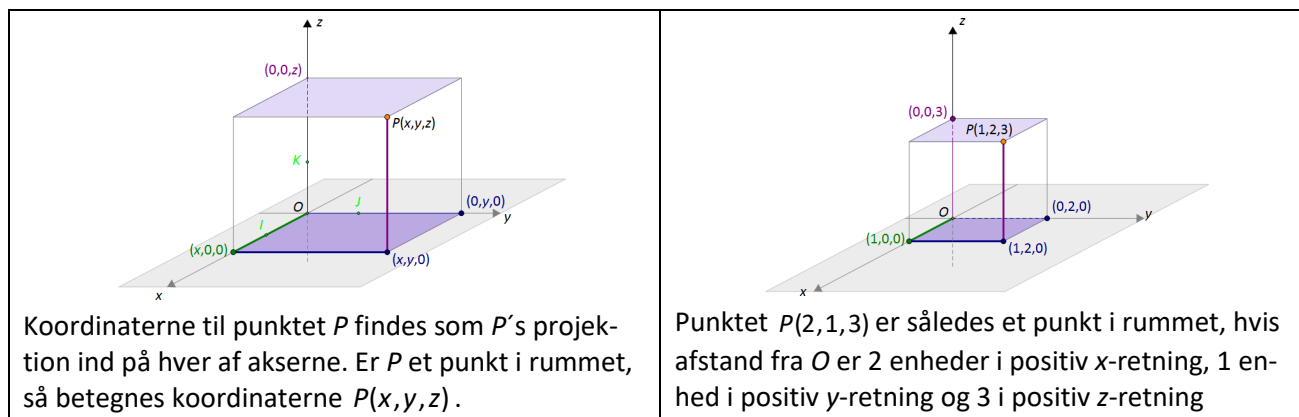
Oktanterne i et 3D-koordinatsystem.

Det todimensionale koordinatsystem svarer således blot til en akseplan i det tredimensionale koordinatsystem. De tre akseplaner betegnes ud fra akserne, som xy -planen (orange), xz -planen (grøn) og yz -planen (blå). Vi vil i det følgende omtale det todimensionale koordinatsystem som *planen*, og det tredimensionale koordinatsystem for *rummet*.

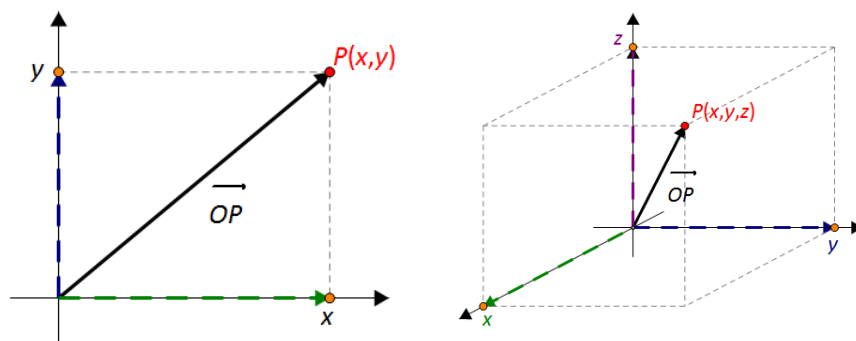
Øvelse 1 Orientering af koordinatsystemer

Hvilke af følgende koordinatsystemer er højrehåndssystemer?





2.2 Vektorer beskrevet med koordinater



Ønsker vi at bevæge os ud i et punkt $P(x, y, z)$ i planen eller i rummet, så går vi langs en stedvektor $\overrightarrow{OP}$ til punktet $P(x, y, z)$, idet man i det rektangulære koordinatsystem først går x enheder ud af x -aksen, og derefter y enheder ud af y -aksen - og endelig, hvis vi befinder os i rummet, z enheder opad z -aksen. Vi tillægger vektor $\overrightarrow{OP}$ samme koordinater som punktet P .

Enhver vektor $\vec{a}$ i planen eller i rummet har en repræsentant med udgangspunkt i O og kan derfor opfattes som stedvektor for et punkt $A(a_1, a_2)$ i planen eller $A(a_1, a_2, a_3)$ i rummet: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Vi benytter normalt følgende *lodrette koordinatnotation* for vektorer, for at kunne skelne mellem vektorer og punkter:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ i rummet og } \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ i planen}$$

Vi har således indført en ny repræsentationsform for vektorer, nemlig *koordinatrepræsentationen*, som i mange tilfælde gør problemløsning lettere end med den geometriske repræsentation alene.

Bemærk, at hvis vi sætter $a_3 = 0$, således vil vektoren ligge i xy -planen, hvilket jo svarer til en vektor i planen. Bemærk også, at i tilfældet, hvor punktet A vælges som punktet $O(0, 0, 0)$, bliver stedvektoren:

$$\overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i rummet og } \overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i planen.}$$

Ifølge vores definition er det egentlig ingen vektor, da den ingen retning har, men vi kalder den i begge tilfælde for *nulvektoren* og betegner den med $\vec{0}$. Alle andre vektorer kaldes for *egentlige* vektorer.

Praxis: Vektornotation i et værktøjsprogram

Nogle værktøjsprogrammer giver ikke mulighed for at skrive pil over et bogstav, som betegnelsen for en vektor. Man må derfor finde andre notationsformer fx fede bogtaver, som betegnelsen for vektorer.

I nogle sammenhænge kan det være hensigtsmæssigt, at skrive vektorer som *rækkevektorer*, dvs. vandret som i en liste. På den måde vil man fx nemt kunne hente enkeltkoordinater ud med reference til den plads, de står på i listen: Hvis vi fx definerer $\mathbf{a} := \{a_1, a_2\}$, så vil vi kunne hente førstekoordinaten ud med

$\mathbf{a}[1]$. I en skriftlig besvarelse forklarer man sin notation, hvis den ikke er gængs.

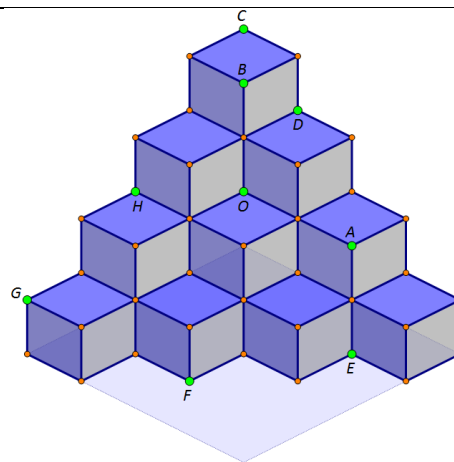
Men vigtige indbyggede kommandoer, som vi gerne vil kunne benytte ved regning med vektorer, kræver at vektorerne er defineret som *søjlevektorer*, dvs. som en slags talskema med 2 (eller 3) rækker og 1 søjle

fx $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Her vil vi så skulle identificere koordinaterne med angivelse af både række og søjleplacering,

dvs. her vil $\mathbf{a}[2,1]$ give os anden koordinaten, fordi den står i række 2 søjle 1, man nævner altså række-nummeret r først og derefter søjlenummeret s : $\mathbf{a}[r,s]$.

Øvelse 2

Beskriv på koordinatform stedvektorerne til punkterne i rummet vist på figuren, idet hver terning repræsenterer en enhedsterning, og udgangspunktet er $O(0,0,0)$.



Øvelse 3

Givet følgende vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

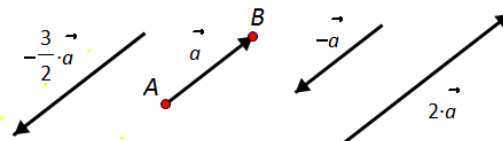
Hvordan kan vi let ændre en vektor i planen til at være en vektor i rummet? Tegn en skitse, der viser vektorernes beliggenhed i et tredimensionalt koordinatsystem.

2.3 Regning med koordinatvektorer

Definition: Modsat vektor og multiplikation med skalar

Vektoren $-\vec{a}$ er den vektor, der har samme længde som $\vec{a}$, men modsat retning, dvs. hvis $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, så er $-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Vi kalder $-\vec{a}$ for den *modsatte vektor* til $\vec{a}$.

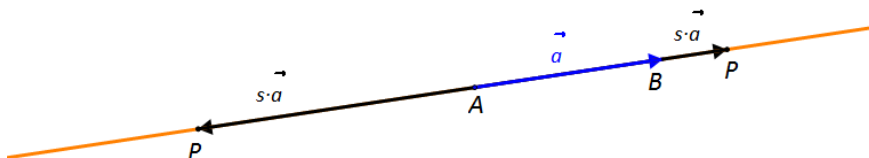
Vektoren $s \cdot \vec{a}$ er den vektor, hvis længde er s gange større end længden af $\vec{a}$, og hvis retning er den samme som $\vec{a}$, hvis s er positiv, den modsatte, hvis s er negativ, og som er nulvektoren, hvis $s = 0$.



Øvelse 4. Parallelitet og proportionalitet

Vis ud fra definitionen, at hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle vektorer, så findes et tal s , så $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$

Afsætter man de to vektorer $\vec{a}$ og $s \cdot \vec{a}$ med samme udgangspunkt A , så vil endepunktet P for $s \cdot \vec{a}$ gennemløbe linjen gennem P og med $\vec{a}$ som retningsvektor, når s gennemløber de reelle tal, dvs. fra $-\infty$ til $+\infty$. På figuren ses to ud af de uendeligt mange placeringsmuligheder for P .



Er en vektor givet ved et koordinatsæt, så svarer processen ovenfor til, at vi ganger hver af vektorens koordinater

med skalaren: $s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$

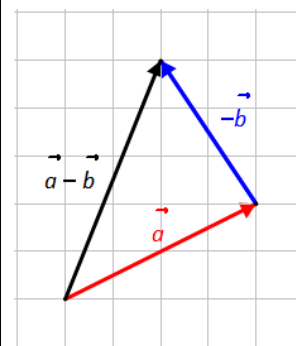
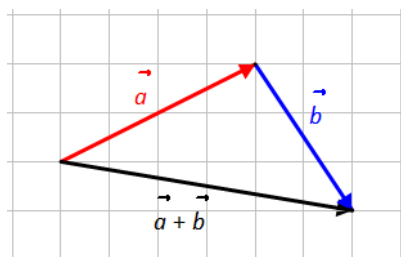
Øvelse 5

Vis ud fra definitionen, at hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, så er $3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \cdot a_1 \\ 3 \cdot a_2 \end{pmatrix}$ og $-1 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = -\vec{a}$

Definition: Addition og subtraktion af vektorer

Vi adderer vektorer geometrisk ved at afsætte repræsentanter for vektorerne i forlængelse af hinanden således, at der hvor den ene pil slutter, begynder den næste osv. På figuren er det demonstreret med to vektorer i planen.

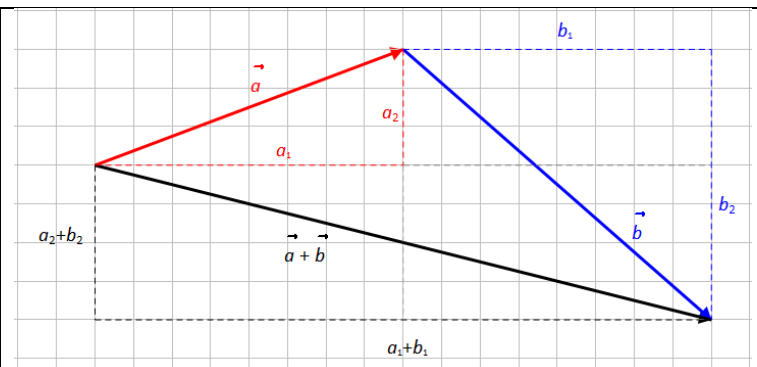
Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ defineres som vektoren $\vec{a} + (-\vec{b})$.



Øvelse 6: Vektoraddition på koordinatform

Vis ud fra eksemplet på tegningen, at:

hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, så er $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$



Bemærk: I det viste eksempel er b_2 negativ.

Dvs. addition - og subtraktion - foregår blot ved at man lægger koordinaterne sammen pladsvist. Dette gælder naturligvis også, hvis vi regner på vektorer i rummet.

Øvelse 7

Tre vektorer er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Beregn koordinatsættene til følgende vektorer:

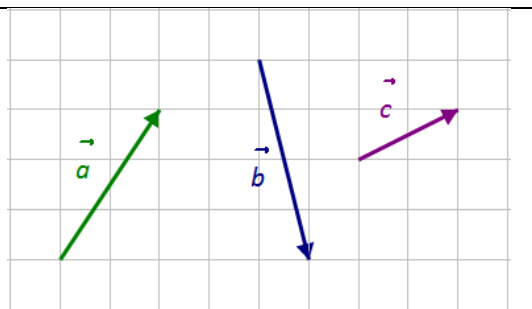
a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$ c) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$

Øvelse 8

På figuren ses tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

Konstruer geometrisk følgende vektorer:

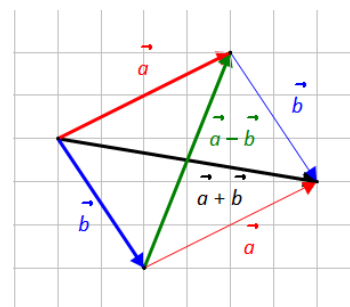
- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{c} - \vec{b}$
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- $\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$



Øvelse 9: Kræfternes parallelogram

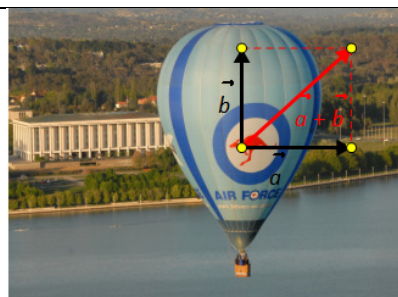
Tegner vi $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra samme punkt, så udspænder de et parallelogram. Vis, at diagonalerne i dette parallelogram netop er vektorerne $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$.

I fysik repræsenterer man kræfter og hastighed ved vektorer, fordi der både indgår en størrelse og en retning. Hvis vi forestiller os, at en genstand er påvirket af de to kræfter repræsenteret ved $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så udgør sumvektoren netop den resulterende kraft, som påvirker genstanden. Derfor kaldes et parallelogram udspændt af to vektorer ofte for *kræfternes parallelogram*.



Eksempel: Bevægelse under påvirkning af flere kræfter

En luftballon bevæger sig under påvirkning af tyngdekraft, opdrift og vind. De to første giver samlet en lodret påvirkning, den sidste en vandret. Bevægelsen kan dermed betragtes som resultat af en vandret bevægelse og en lodret bevægelse. Repræsenterer vi ballonens lodrette og vandrette hastighed med vektorer, så kan vi illustrere ballonens resulterende hastighed frembragt af disse ud fra kræfternes parallelogram. Bemærk, at bevægelsesbanens stejlehed vil være afhængig af de to hastigheders størrelser.



Øvelse 10

- Vælg to tilfældige ikke-parallele vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (tegn og aflæs koordinater eller omvendt!).
- Tegn det parallelogram, som de to vektorer udspænder, og tegn sumvektoren samt differensvektoren.
- Aflæs sumvektorens og differensvektorens koordinater, og kontroller ved beregning, at koordinatsættene til de to vektorer er korrekte.

Eksempel: Linearkombination af vektorer – lineært afhængige / uafhængige vektorer

Der er givet tre vektorer i rummet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En vektor bestemt ved en sum af disse tre vektorer, hvor hver af vektorerne er ganget med en skalar, kaldes en *linearkombination* af de tre vektorer.

Bestem koordinatsættet til linearkombinationen: $\vec{d} = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c}$.

Et sæt af vektorer kaldes *lineært afhængige*, hvis blot en af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige vektorer. Hvis ingen af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige, så kaldes vektorerne *lineært uafhængige*. Eksempelvis er det sæt af vektorer, der består af de fire vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ og $\vec{d}$ ovenfor lineært afhængige, mens sættet bestående af de tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er lineært uafhængige. Geometrisk set betyder lineær afhængighed, at vektorerne ligger i samme plan, mens lineær uafhængighed betyder, at vektorerne ikke ligger i samme plan.

Praxis: Regning med vektorer i et værktøjsprogram

Bruger man et værktøjsprogram, vil man typisk definere de opgivne vektorer fra start, så man kan regne videre med dem. Defineres:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

kan man bestemme koordinater for vektorer som $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2 \cdot \vec{a}$ og $\vec{c} := 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ blot ved at opskrive udtrykkene. Ønsker vi at regne videre med en vektor *definerer* vi den som en ny vektor, som vist med $\vec{c}$.

Øvelse 11

Bestem i et værktøjsprogram vektorerne nævnt i praxisboksen.

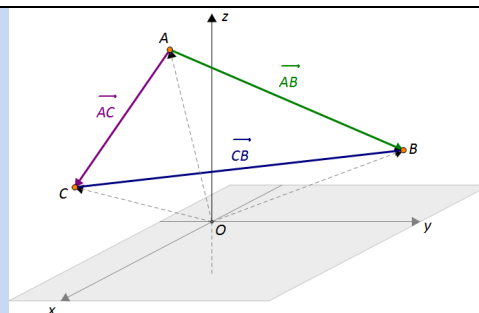
Forbindelsesvektorer

Når vi skal beskrive en geometrisk figur fx en trekant i planen eller rummet, så vil vi typisk angive koordinatsættene til trekantens hjørnepunkter. Når vi skal regne på trekanten, så får vi brug for at kende koordinatsættene til de vektorer, der beskriver trekantens sider.

Sætning 3: Indskudsreglen

For tre punkter $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ og $C(c_1, c_2, c_3)$ i rummet (eller i planen – tegn selv!) gælder, der:

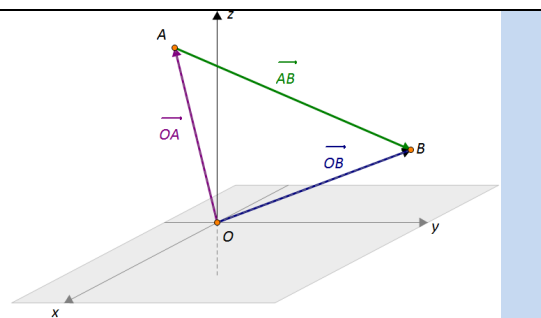
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \text{eller} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$$

**Øvelse 12**

Vis reglerne ud fra definitionen på geometrisk addition af vektorer og definitionen på modsat vektor.

Sætning 4: Koordinaterne for forbindelsesvektoren $\overrightarrow{AB}$
Hvis $A = (a_1, a_2, a_3)$ og $B = (b_1, b_2, b_3)$, så er koordinaterne forbindelsesvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Bevis

Vælg $C = O$ i indskudsreglen. Så er $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Indsæt nu koordinaterne, og resultatet står der

Praxis: Forbindelsesvektor i et værktøjsprogram

Bruger man et værktøjsprogram, vil man typisk definere de opgivne punkter som stedvektorerne fra start, så man kan regne videre med dem. Har vi fx givet $A = (2, 3, 6)$ og $B = (5, -4, -2)$ kan vi gøre således:

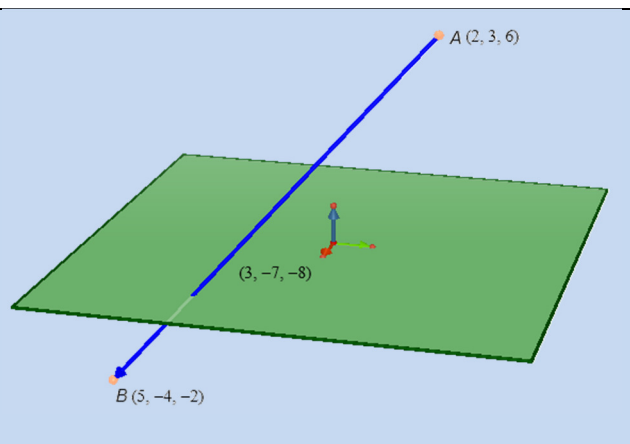
$$\overrightarrow{OA} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{OB} := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ og dermed } \overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Øvelse 13

Bestem koordinatsættene til forbindelsesvektorerne mellem følgende tre punkter både ved håndkraft og i et værktøjsprogram: $A(3, -1, 4)$, $B(-1, 6, 2)$ og $C(8, -4, 12)$.

Praxis: Konstruktioner i et 2D- eller 3D-geometri-program

Man kan også plotte punkter i et 2D- eller 3D-geometriprogram, og konstruere vektorerne der ud fra. Herefter kan man benytte programmets indbyggede kommando til at bestemme koordinatsættene til vektorerne.



Øvelse 14

Konstruer de tre punkter i Øvelse 13 ovenfor i et 3D-værktøj, og bestem ved aflæsning deri koordinatsættene til deres forbindelsesvektorer.

Midtpunkt af et linjestykke

Vi vil bestemme koordinatsættet til midtpunktet M mellem de to punkter i rummet: $A(a_1, a_2, a_3)$ og $B(b_1, b_2, b_3)$.

Tegn selv med i 2D!

Da M er midtpunktet mellem A og B , så må der gælde, at

$$2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

Anvend sætning 4 om forbindelsesvektorer

Flyt $2 \cdot \overrightarrow{OA}$ over

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

Gang igennem med $\frac{1}{2}$

Indsæt koordinater

Gang ind og udnyt, at M og $\overrightarrow{OM}$ har samme koordinater

Øvelse 15 Midtpunkt af linjestykke

- Bestem koordinaterne for midtpunktet mellem de to punkter $A(2, 3, 6)$ og $B(5, -1, -4)$
- Kontroller beregningerne ved en konstruktion i et 3D-værktøj.

Eksempel: Vektorernes beskrivelseskraft

Mange geometriske argumenter om fx højder og medianer i en kan behandles elegant med brug af vektorer. Det er emnet for HEM2, projekt 7.2.

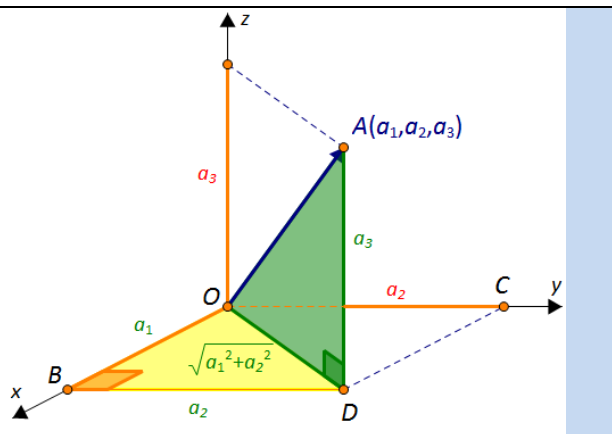
2.4 Længden af en vektor

Længden af stedvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, hvor punktet A har koordinaterne $A(a_1, a_2, a_3)$, svarer til længden af det linjestykke, der forbinder punktet A med O , dvs. $|OA|$. Da enhver vektor kan opfattes som en stedvektor, kan alle vektorers længde beregnes således. En stedvektors længde kan beregnes ved at anvende Pythagoras' sætning, og det viser sig, at denne formel let generaliseres fra plan til rum.

Sætning 5: Længden af en vektor

Længden af en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ er bestemt ved

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



Bevis

Vi afsætter $\vec{a}$ som stedvektor: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ og anvender Pythagoras' sætning to gange – se illustrationen. I xy -planen får vi af trekant OBD , der er retvinklet, at

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

I vektorens plan får vi tilsvarende af trekant ODA , der er retvinklet, at

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Eksempel: Længden af en vektor

Vi vil bestemme længden af vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vi indsætter i formlen: $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Praxis: Længden af en vektor i et værktøjsprogram

Har vi defineret en vektor i et værktøjsprogram, kan vi bestemme længden ved at anvende en kommando som $\text{norm}(\vec{a})$.

Har vi defineret $\vec{a} := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, giver kommandoen $\text{norm}(\vec{a}) = 10$.

Øvelse 16

Bestem længden af følgende vektorer ved hjælp af længdeformlen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Undersøg, hvor dit værktøjsprogram kan udregne længden af en vektor, og kontroller dine beregninger.

Øvelse 17 Længden af en forbindelsesvektor

a) Givet to punkter i rummet: $A(a_1, a_2, a_3)$ og $B(b_1, b_2, b_3)$, vis følgende formel:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

b) Givet $A(2, 3, 6)$ og $B(5, -4, -2)$, vis at $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{122} = 11,05$.

c) Givet tre punkter i planen: $A(2, -1)$, $B(4, 6)$ og $C(-3, 5)$. Bestem sidelængderne i trekant ABC .

Øvelse 18 Længdebestemmelse i geometriprogrammer

a) Plot de tre 2D-punkter i øvelsen ovenfor, konstruer trekanten og bestem sidelængderne.

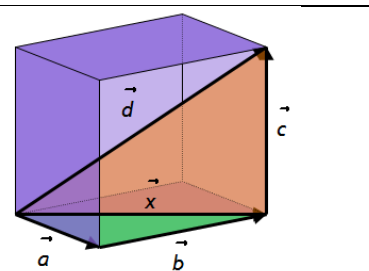
b) Plot de to 3D-punkter i øvelsen ovenfor i et 3D-geometriprogram, og bestem afstanden mellem dem.

Eksempel: Pythagoras' sætning i højere dimensioner

Som beviset antyder, kan man generalisere Pythagoras' sætning til højere dimensioner. Lad os se på en kasse udspændt af de tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, som vist på figuren. Vi har set, at vi via en diagonalvektor $\vec{x}$ i kassens bund kan nå frem til, at der for en diagonalvektor $\vec{d}$ i kassen gælder (overvej!):

$$\vec{d}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2$$

hvilket netop er Pythagoras' sætning i 3 dimensioner.

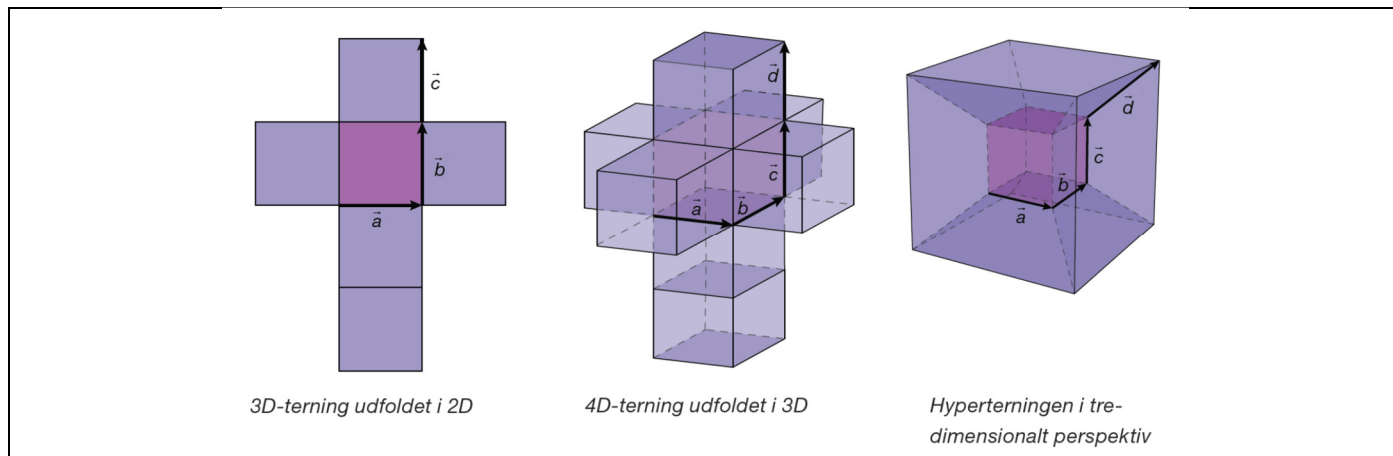


3D-kasse udspændt af tre vektorer

Fortsætter vi tankegangen, vil vi nok pr. intuition acceptere, at dette også må gælde i højere dimensioner end 3. Der er imidlertid vanskeligt at tegne sig frem til et bevis som ovenfor, fordi hvordan tegner man en kasse i fire dimensioner? Man kan fx begynde med udfolde en 3D-terning i 2D (se figur), og så følge princippet, dvs. udfolde en 4D-terning (kaldes også en hyperterning) i 3D, hvor den vil bestå af 8 terninger (se figur). Hvis vi drejer alle disse 8 terninger

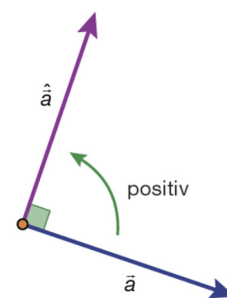
Projekter: fra kapitel 7 Projekt 7.17 Vektorer i 3d og analytisk rumgeometri

90° "opad" i det firedimensionale rum, så vil vi netop få en hyperterning, hvor vi ser de 8 terninger som den indre og den ydre samt de seks terninger, som forbinder den indre med den ydre. I fire dimensioner handler Pythagoras' sætning således om, at bestemme længden af en diagonalvektor $\vec{d}_{4D}$ i en tilsvarende retvinklet hyperkasse udspændt af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ og $\vec{d}$.



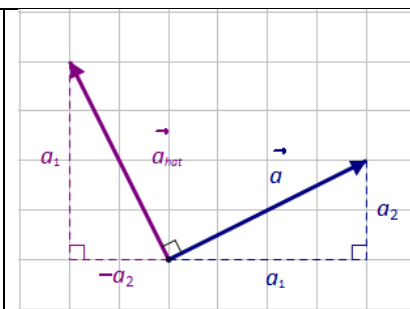
2.5 Tværvektor i en plan

Den vektor, der fremkommer ved at dreje en plan vektor $\vec{a}$ 90° i *positiv* omløbsretning kalder vi for *tværvektoren* til $\vec{a}$. Den betegnes $\hat{\vec{a}}$ (kaldes sommetider "hat-vektoren", og processen kaldes sommetider "at hatte"). Da nulvektoren ikke har nogen retning, definerer vi $\hat{\vec{0}} = \vec{0}$.



Sætning 6: Koordinater for en tværvektor

Har en vektor koordinaterne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ så får dens tværvektor koordinaterne $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.



Øvelse 19 – Bevis sætningen!

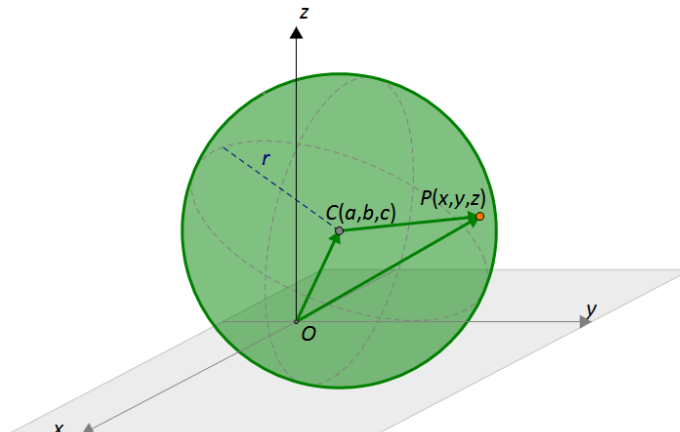
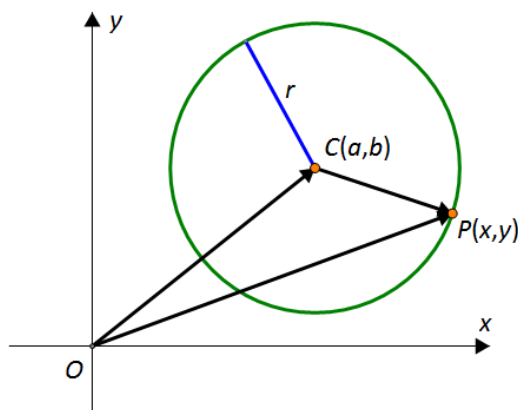
Bevis sætningen ved brug af ovenstående illustration. Tegn selv andre beliggenheder af vektor $\vec{a}$.

Øvelse 20

Bestem koordinatsættet til tværvektoren af følgende vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

2.6 Cirkler og kugler

Ud fra længdeformlen kan vi bestemme en ligning for en cirkel i planen samt en kugle i rummet. En cirkel / kugle består jo netop af de punkter, hvis afstand til centrum er lig med radius..



Sætning 7: Ligningen for en cirkel i planen og for en kugle i rummet

Cirklen med centrum i $C(a, b)$ og radius r har ligningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Kuglen med centrum i $C(a, b, c)$ og radius r har ligningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Bevis

Udledningen bygger på øvelse 17 om længden af forbindelsesvektorer. Vi ser på tilfældet med kuglen.

Lad $C(a, b, c)$ være kuglens centrum, og lad $P(x, y, z)$ betegne et tilfældigt punkt på kuglen. Kaldet vi kuglens radius for r får vi af formelen i øvelsen:

$$|\overline{CP}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$\text{Indsæt } |\overline{CP}| = r$$

$$\text{Kvadrer}$$



Eksempel: Cirkelns ligning / kuglens ligning

En cirkel har centrum i $C(3, 2)$ og går igennem punktet $P(11, -4)$.

Vi vil bestemme en ligning for cirklen.

Radius i cirklen bestemmes som længden af en radiusvektor:

$$\overline{CP} = \begin{pmatrix} 11-3 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}. \text{ Dvs: } r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Vi kan nu opskrive ligningen for cirklen: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10^2$.

Det er naturligvis ikke ofte man får en radius, der er et pænt helt tal. Men da tallet r^2 indgår i ligningen betyder det mindre.

Kuglen med centrum i $C(1, 3, 2)$, og som går i gennem punktet $P(4, 6, 5)$, har en radius på:

$$r = |\overline{CP}| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{27} = 5,196$$

Ligningen er: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 27$

Øvelse 21

Bestem ved brug af et værktøjsprogram ligningen for:

- Kuglen med centrum i $C(3, 7, -1)$ og radius $r = 6$.
- Cirklen, der går gennem $P(2, -8)$ og som har centrum i $C(-3, 4)$.

- c) Kontroller dine resultater ved at konstruere cirklen i et 2D-geometriprogram og kuglen i et 3D-geometriprogram og bestemme ligninger ved brug af programmernes indbyggede faciliteter.

Eksempel: Omskrivning af ligninger til cirkel eller kugleligninger på normal form

En kugles ligning på normal form er som angivet i sætningen. Et eksempel kunne være:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 10 \quad (*)$$

Dette er ligningen for kuglen med centrum i $C(3, -2, 5)$ og radius $r = \sqrt{10}$.

Ganger vi parenteserne ud kan vi få vi ligningen skrevet således efter at have reduceret:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y - 10 \cdot z + 28 = 0 \quad (**)$$

Vi har regnet i hånden og her anvendt de to kvadratsætninger, som vi har præsenteret i C-bogens kapitel 7:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

(Kontroller evt. udregningerne med en expand-kommando).

Da vi blot har ganget parenteserne ud, fremstiller de to ligninger (*) og (**) samme punktmængde.

Hvis vi havde fået opgivet ligningen (**) skulle vi derfor kunne bestemme radius og centrum ved at omskrive til (*).

Det kan vi gøre efter følgende opskrift:

Først flyttes tallet 28 over på den anden side:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y - 10 \cdot z = -28 \quad (***)$$

Læg nu mærke til, at koefficienterne -6 , $+4$ og -10 til de tre led $-6 \cdot x$, $+4 \cdot y$ og $-10 \cdot z$ hver for sig er det dobbelte af de tal, der indgår i parenteserne i (*). Disse tal stammer fra koordinaterne til centrum. Derfor kan vi aflæse koordinaterne til centrum ved at halvere koefficienterne og skifte fortegn! Og vi kan opskrive venstreside af ligningen (*):

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2$$

Men ganger vi fx parentesen $(x-3)^2$ ud, får vi

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 - 6 \cdot x + 9$$

Tallet 9 "mangler" i (***) for at vi kan anvende kvadratsætningen baglæns (fra højre mod venstre). Tilsvarende mangler vi tallene $2^2 = 4$ og $5^2 = 25$ for at kunne omskrive til y og z -parenteserne. Derfor lægger vi disse tal til på begge sider i (***):

$$x^2 - 6 \cdot x + 9 + y^2 + 4 \cdot y + 4 + z^2 - 10 \cdot z + 25 = -28 + 9 + 4 + 25$$

$$(x^2 - 6 \cdot x + 9) + (y^2 + 4 \cdot y + 4) + (z^2 - 10 \cdot z + 25) = 10$$

Reducer og saml i parenteser

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 10$$

Vi aflæser: Ligningen fremstiller kuglen med centrum i $C(3, -2, 5)$ og radius $r = \sqrt{10}$.

Bemærkning: Giver reduktionen 0 på højre side, fremstiller ligningen ét punkt, nemlig C. Giver reduktionen et negativt tal, er der ingen punkter, der tilfredsstiller ligningen.

Øvelse 22

Undersøg, hvilken punktmængde følgende ligninger beskriver:

a) $x^2 + y^2 - 12 \cdot x + 8 \cdot y + 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot y - 4 \cdot z - 22 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 8 \cdot x - 6 \cdot y - 2 \cdot z + 121 = 0$

3. Skalarprodukt af vektorer i plan og rum

Der findes to forskellige produkter af vektorer, hvor det ene resulterer i en skalar (et tal) og den anden resulterer i en vektor. Naturlig kaldes disse for skalarprodukt og vektorprodukt. Skalarproduktet gælder både i plan og rum, mens vektorproduktet kun findes i rummet.

4.1 Skalarprodukt i koordinater

Definition 1: Skalarprodukt i koordinater	
Plan	Rum
To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen har koordinaterne: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er defineret ved: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	To egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet har koordinaterne: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er defineret ved: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Skalarproduktet kaldes ofte for *prikproduktet* pga. symbolet, der anvendes til at beskrive begrebet, nemlig en prik. Prikken ligner, men må ikke forveksles med et almindeligt gangetegn. Når vi skriver skalarprodukter op, så skal prikken være tydeligt markeret. For at tydeliggøre det, markerer vi det her med symbolet $\bullet$. Når vektorer løsrives fra geometriske pile, så kaldes skalarproduktet også for *det indre produkt* i et vektorrum.

Praxis: Skalarprodukt i værktøjsprogram

I de fleste værktøjsprogrammer findes der en indbygget kommando til bestemmelse af skalarproduktet.

Har vi fx givet $\vec{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, anvender man en indbyggede kommando, som fx: $\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = 9$.

Øvelse 23

Beregn skalarproduktet af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen i hvert af nedenstående tilfælde.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Øvelse 24

Tegn ovennævnte vektorer parvist med fælles udgangspunkt i et 2D-geometriprogram, og overvej, hvad man kan sige om vinklen imellem vektorerne ud fra skalarproduktets værdi. Formuler den sætning, der ser ud til at gælde.

Øvelse 25

Vis, at $\vec{a} \cdot \hat{\vec{a}} = 0$, for enhver vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ i planen.

Øvelse 26. Regneregler for skalarprodukt

Vis, at $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, dvs. at skalarproduktet opfylder den *kommutative lov*.

Vis, at $(s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s \cdot \vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$, dvs. skalarproduktet opfylder reglen om at gange en skalar s på.

Vis, at $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, dvs. at skalarprodukt opfylder den *distributive lov*.

Øvelse 27. Kvadratsætninger inden for vektorregning

Vis ved hjælp af regnereglerne fra øvelsen ovenfor, at vi kan regne således:

$$a) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$b) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2, \text{ fordi } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$c) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{og} \quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Bemærk. vi skriver skalarproduktet af en vektor med sig selv som $\vec{a}^2$, ligesom vi gør med tal.

Øvelse 28

Beregn skalarproduktet af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet i hvert af nedenstående tilfælde, og kontroller dine resultater i et værktøjsprogram.

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c) \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Gælder den sætning du formulerede ovenfor for vektorer i planen mon også for vektorer i rummet?

Øvelse 29

Vis, at $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, for enhver vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ i plan og rum.

3.2 Skalarprodukt og vinkler

Det fine ved skalarproduktet er, at man kan vise, at det er helt uafhængigt af, hvilket koordinatsystem vi vælger. Det betyder nemlig, at man fra situation til situation kan lægge koordinatsystemet præcis sådan, at den problemstilling, man står overfor, bliver mest simpel fx, når vi skal bestemme vinkler mellem vektorer.

Sætning 8: Skalarprodukt og vinkel mellem vektorer

Skalarproduktet af to egentlige vektorer kan beregnes ved produktet af de to vektorers længder og cosinus til vinklen mellem vektorerne, dvs.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

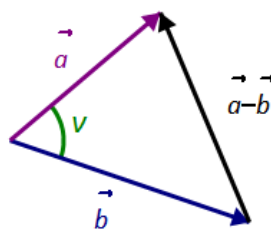
hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bevis:

Vi vil opfatte de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ samt deres differensvektor som tre linjestykker, der sammen danner en trekant (se figur). Således er de tre sidelængder i trekanten bestemt ved længden af hver af de tre vektorer.

Fra øvelse 27 har vi:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$



Med anvendelse af øvelse 29 kan dette omskrives til:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (*)$$

Fra cosinusrelationen har vi, med $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu) \quad (**)$$

Men (*) og (**) er to udtryk for $|\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$, så højresiderne er ens:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu)$$

$$-2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu)$$

Reducer

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu)$$

Divider med -2

Hermed er sætningen bevist. 

Øvelse 30

Vis, at formelen også er opfyldt, hvis vektorerne er parallelle.

(Vink. udnyt, at vi kan skrive $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$, samt regnereglen: $(s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$. Der er to tilfælde!)

Af bevist for sætning 8 følger også:

Sætning 9: Skalarproduktet er uafhængigt af koordinatsystem

Skalarproduktet af to egentlige vektorer i plan og rum afhænger ikke af det valgte koordinatsystem.

Bevis:

Undervejs omskrivning i beviset ovenfor så vi, at

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ som omskrives til:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Dvs. skalarproduktet afhænger kun af vektorernes længder samt sumvektorens længde. Men summen af to vektorer er jo defineret helt uafhængigt af koordinatsystemet, og det er længden af en vektor også! Altså er skalarproduktet uafhængigt af, hvilket koordinatsystem vi arbejder indenfor (blot enheden holdes fast). 

Øvelse 31. Vektorbevis for klassisk geometrisk sætning

a) Vis, at $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{b}|^2$.

b) Tegn en skitse af et parallelogram udspændt af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor du tegner sumvektoren og differensvektoren ind i parallelogrammet. Benyt din skitse samt ovenstående resultat til at argumentere for følgende: *I et parallelogram er summen af diagonalernes kvadrater lig med summen af sidernes kvadrater.*

Øvelse 32. Hvorfor ikke gange vektorer ligesom vi adderer dem?

Vektoraddition sker koordinatvis og giver en ny vektor. Det ville derfor være naturligt at overveje at indføre multiplikation af vektorer efter samme ide. Lad os prøve, og lad os betegne dette med symbolet $\odot$.

$$\text{Givet vektorerne } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ så definerer vi: } \vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Betragt fx vektorerne } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Her får vi: } \vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nu drejes koordinatsystemet svarende til at begge vektorer drejes 45° i positiv omløbsretning.

a) Tegn situationen og vis at i det nye koordinatsystem har vektorerne følgende koordinater:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b) Vis, at i det nye koordinatsystem får vi: $\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Det nye produkt afhænger således af koordinatsystemet. Giv en begrundelse for, at det derfor ikke kan være særligt anvendeligt.

d) Vis, at skalarproduktet giver samme tal i de to systemer.

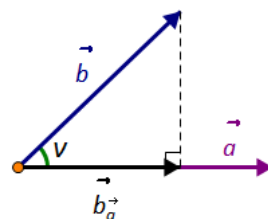
Praxis: Vinkel mellem vektorer

Vinklen *mellem* de to vektorer betegnes også $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Gradintervallet for v er $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$, og vi siger, at v er den vinkel som den ene vektor skal drejes for at blive ensrettet med den anden. Vi regner ikke vinkler med fortegn, dvs. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Geometrisk kan vi forstå skalarproduktet som længden af $\vec{a}$ ganget med længden af $\vec{b}$'s projektion på $\vec{a}$ (eller omvendt), fordi vi kan læse skalarproduktet som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (|\vec{b}| \cdot \cos(v))$$

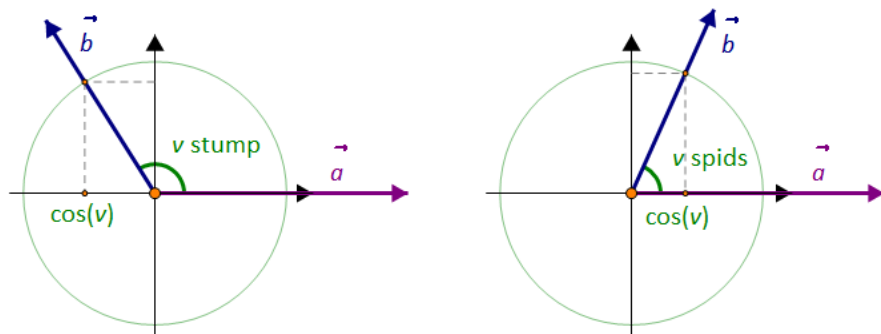
hvor $|\vec{b}| \cdot \cos(v)$ netop svarer til længden af projektionsvektoren $\vec{b}_a$.



Øvelse 33

Gør omvendt rede for, at man også kan forstå skalarproduktet som længden af $\vec{b}$ ganget med længden af $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$.

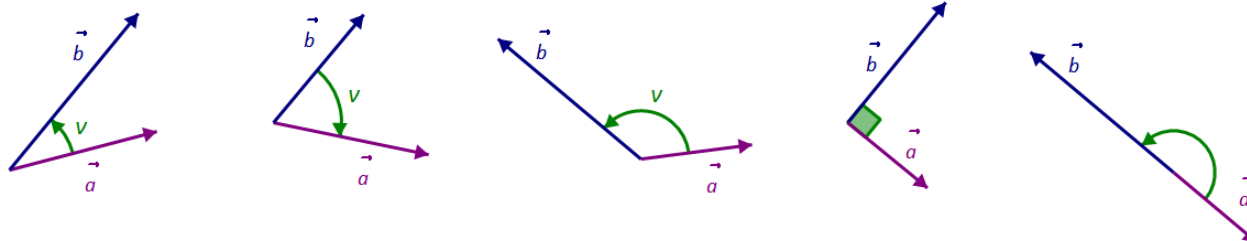
Skalarproduktets fortegn afhænger af om vinklen $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ er spids eller stump. Det ses let, idet vi kan lægge to vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med udgangspunkt i en enhedscirkels centrum, hvorved vi får:



Vinklen mellem vektorerne: $v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$	Fortegn for cosinus	Fortegn for skalarprodukt
$0^\circ \leq v < 90^\circ$	$\cos(v) > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
$v = 90^\circ$	$\cos(v) = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$90^\circ < v \leq 180^\circ$	$\cos(v) < 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Øvelse 34

Angiv fortegnet for skalarprodukterne af de viste par af vektorer:



Specielt lægger vi mærke til, at to vektorer er ortogonale, når deres skalarprodukt er nul, og omvendt, at når skalarproduktet af to vektorer er nul, så er vektorerne enten ortogonale *eller* også er en eller begge vektorer en nulvektor. Dette er et vigtigt resultat, som vi derfor formulerer i en sætning:

Sætning 10: Ortogonale vektorer

Skalarproduktet af to egentlige vektorer er nul præcis når de er ortogonale:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ er ensbetydende med } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Øvelse 35

Undersøg, om følgende par af vektor i rummet er ortogonale:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel: Bestem parameter for ortogonalt vektorpar

Metode 1: Håndregning

To vektorer i planen er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -t - 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$$

hvor t er et tal, $t \in \mathbb{R}$.

Vi vil bestemme værdier af t , der gør, at $\vec{a} \perp \vec{b}$, dvs. at vektorerne er ortogonale.

Vi udregner skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -t - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot t \cdot t + (-t - 4) \cdot 4 = 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 16$$

Vi får altså en andengradsligning i t , som har diskriminanten: $d = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16) = 16 + 128 = 144 > 0$, dvs. der er to løsninger:

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 12}{4} = 1 \pm 3, \text{ dvs. } t = -2 \text{ eller } t = 4$$

Konklusion: $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, når $t = -2$ eller $t = 4$, dvs. når

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Metode 2: Værktøjsprogram

Vi definerer vektorerne $\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -t - 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} := \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$, og opstiller den ligning, der skal løses:

$$\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \triangleright \quad 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t - 16 = 0$$

Projekter: fra kapitel 7 Projekt 7.17 Vektorer i 3d og analytisk rumgeometri

og løser den med solve:

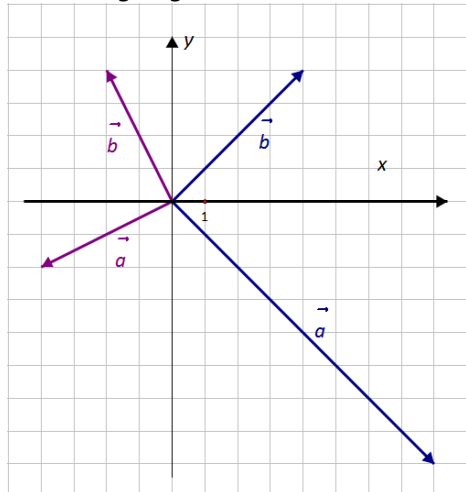
$$\text{solve}(\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b})=0, t) \triangleright t=-2 \vee t=4$$

Herefter udregnes de ortogonale vektorpars koordinater med en betinget kommando:

$$\vec{a}_1 := \vec{a} | t=-2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}_1 := \vec{b} | t=-2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og tilsvarende for den anden parameterværdi.

Kontroltegning:



De to par af vektorer, der er løsning til opgaven i eksemplet.

Øvelse 36

To vektorer i planen er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hvor t er et tal, $t \in \mathbb{R}$.

Bestem den værdi af t , der gør at $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Eksempel: Skalarprodukt til bestemmelse af vinkel mellem vektorer

Der er givet vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Vi vil bestemme vinklen mellem disse to vektorer.

Metode 1: Beregning i et værktøjsprogram

Vi vil nu benytte skalarproduktet til at bestemme vinklen. Vi omskriver skalarproduktet og isolerer $\cos(v)$:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(v) = \frac{6 \cdot 12 + 8 \cdot (-5)}{\sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

Indsæt udregning af skalarprodukt og længder

$$\cos(v) = \frac{32}{10 \cdot 13}$$

Reducer

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{32}{10 \cdot 13}\right) = 75,75^\circ$$

Anvend $\cos^{-1}$ (eller arccos)

Man kan også benytte et værktøjsprograms indbyggede faciliteter. Man definerer de to vektorer

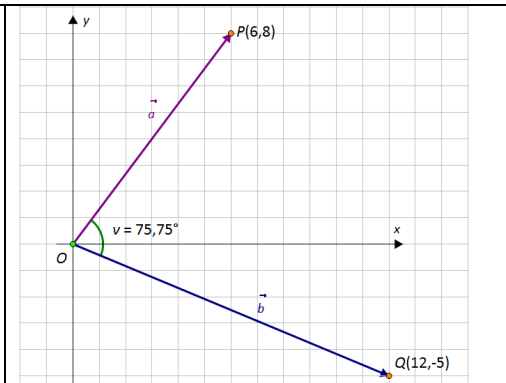
$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} := \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

og indsætter i formlen, hvor vinklen er isoleret:

$$v = \arccos\left(\frac{\text{dotp}(\vec{a}, \vec{b})}{\text{norm}(\vec{a}) \cdot \text{norm}(\vec{b})}\right) = 75,75^\circ$$

2. Metode: Konstruktion i et geometriprogram

Konstruer vektorerne i et 2D-geometriprogram med fælles udgangspunkt i $(0,0)$, og benyt en indbygget kommando i værktøjsprogrammet til at bestemme vinklen mellem vektorerne.



Øvelse 37

I et koordinatsystem i rummet er der givet tre punkter $A(1,1,1)$, $B(3,5,5)$ og $C(0,-3,-7)$.

a) Bestem vinklen mellem $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$

b) Plot de tre punkter i et 3D-geometriprogram, konstruer forbindelsesvektorerne $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ og bestem vinklen mellem disse med programmets facilitet.

3.3 Parameterfremstilling for en ret linje i plan og rum

En ret linje er som bekendt fastlagt ved to punkter på linjen. Vi vil nu beskrive en ret linje l ud fra ét punkt på linjen samt en vektor.

Vi lader $P_0(x_0, y_0)$ betegne det faste punkt på linjen l , og vi lader $\vec{r}$ betegne en vektor, der er parallel med l .

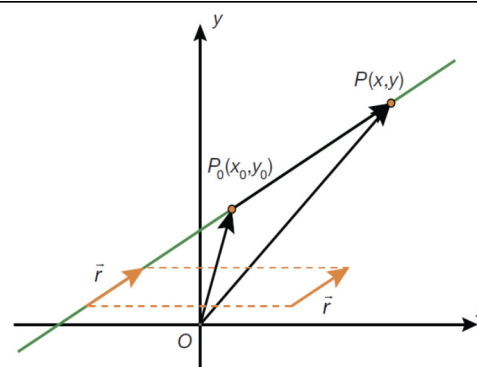
Vi lader punktet $P(x, y)$ betegne et variabelt punkt på linjen l , dvs.

vektoren $\vec{P_0P}$ er parallel med linjen. $\vec{P_0P}$ er derfor også parallel med $\vec{r}$, altså findes der en skalar s , således at

$$\vec{P_0P} = s \cdot \vec{r}$$

$$\vec{OP} - \vec{OP_0} = s \cdot \vec{r}$$

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + s \cdot \vec{r}$$



Vi omskriver nu til koordinatform. Er det en linje i planen og sætter vi $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, får vi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \text{ hvor } s \in \mathbb{R}$$

Oftentimes er det i beregninger hensigtsmæssigt at have linjens parameterfremstilling skrevet på formen:

$$x = x_0 + s \cdot r_1$$

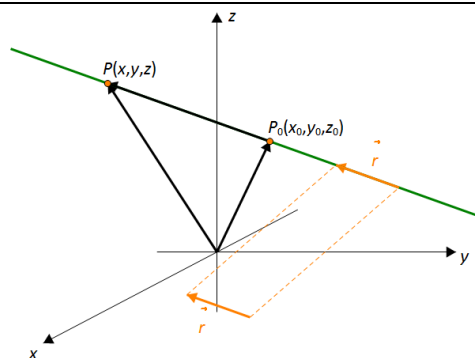
$$y = y_0 + s \cdot r_2$$

En linje har således uendeligt mange parameterfremstillinger svarende til, at vi vælger et af de uendeligt mange andre punkter på linjen som P_0 og en anden vektor parallel med $\vec{r}$ som retningsvektor.

Helt analogt får vi en parameterfremstilling for en linje i rummet på formen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + s \cdot r_1 \\ y_0 + s \cdot r_2 \\ z_0 + s \cdot r_3 \end{pmatrix},$$

hvor $s \in \mathbb{R}$



Øvelse 38

En ret linje m i rummet går gennem punkterne $A(2, -6, 1)$ og $B(5, -4, 3)$.

Bestem $\overrightarrow{AB}$, og bestem en parameterfremstilling for m .

Eksempel: Fortolkning af parameterfremstillingen for en linje

En ret linje i planen har parameterfremstillingen:

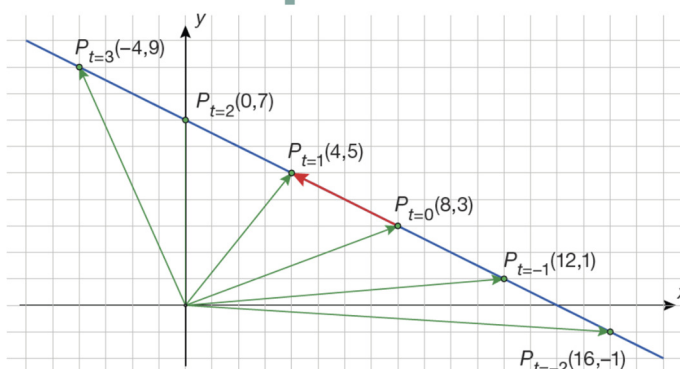
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Vi kan betragte punktet $P(x, y)$, som en partikel der over tid gennemløber linjen. Fx kan partiklens position til tiden $t = 2$ bestemmes således:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 4 \cdot 2 \\ 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende med andre værdier af t .

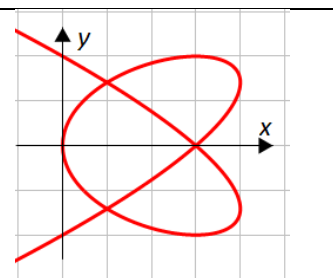
Illustrationen viser partiklens position til forskellige tidspunkter. Punkterne er indtegnet sammen med de tilhørende stedvektorer.



Eksempel: Vektorfunktioner

Ovenstående kan generaliseres til at omfatte meget andet end linjer, idet banekurven for en partikel, der bevæger sig over tid, kan beskrives ved en

vektorfunktion af typen: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, hvor $t \in \mathbb{R}$



Funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er reelle funktioner, som ikke behøver være lineære, men fx kan det være polynomier. Her ved man fx kan få en parameterkurve, der krydser sin egen bane – og det mere end en gang! Den slags funktioner ser vi nærmere på i HEM3, kapitel 4 om *Vektorfunktioner og parameterkurver*.

Eksempel: Ortogonale linjers hældningskoefficienter

To rette linjer l og m i planen, der har hældningskoefficienterne a_l og a_m , har parameterfremstillingerne:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_l \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{og}$$

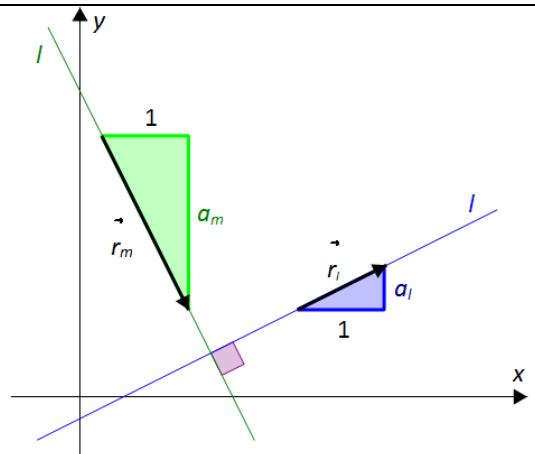
$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_m \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Når to linjer er ortogonale, er skalarproduktet af deres retningsvektorer nul. Heraf får vi:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_m \end{pmatrix} = 0$$

$$1 + a_l \cdot a_m = 0$$

$$a_l \cdot a_m = -1$$



Dvs. når man ganger ortogonale linjers hældningskoefficienter, så får vi -1 .

Praxis: Retningsvektorer og hældningskoefficienter

Hældningskoefficienten for en ret linje i planen kan bestemmes ud fra linjens retningsvektor ved at forkorte vektoren så førstekoordinaten bliver 1. På symbolsk form ser det således ud:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{er ensbetydende med} \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r_2}{r_1} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Linjen l har altså hældningskoefficienten $a_l = \frac{r_2}{r_1}$.

Øvelse 38 Retningsvektor og hældningskoefficient for en ret linje i planen

En ret linje l i planen er parallel med $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, og går gennem punktet $P_0(3, -2)$.

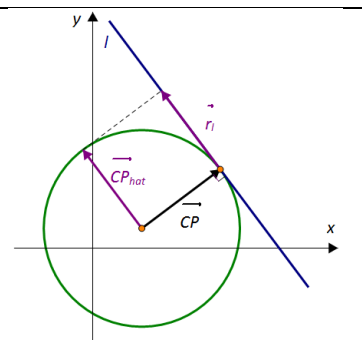
- Bestem en parameterfremstilling for l , og bestem hældningskoefficienten for l .
- Er l ortogonal på linjen med ligningen $y = -0,25 \cdot x - 1,25$?

Eksempel: Parameterfremstillingen for en cirkel- eller kugletangent

En cirkel har ligningen $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 10^2$. Vi vil bestemme en parameterfremstilling for tangenten til cirklen i punktet $P(13, 8)$.

Som nævnt i afsnit 1.1 vil tangenten stå vinkelret på radiusvektor $\vec{CP}$, og derfor vil tværvektoren til $\vec{CP}$ være en retningsvektor for tangenten. Vi får:

$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} 13-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{dvs.} \quad \widehat{\vec{CP}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$



Vi kan vælge at forkorte $\widehat{\vec{CP}}$ (divider begge koordinater med 11), så vi får retningsvektoren: $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Regner vi i hånden, er den nemmere at regne videre med.

Vi får således tangentens parameterfremstilling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$

Bemærkning! I et 2D-geometriprogram kan vi konstruere cirklen og afsætte punktet $P(13,8)$ på cirklen. Derefter kan vi konstruere radiusvektor samt tangenten vinkelret radiusvektor i P , og derefter bestemme en ligning (!) for tangenten, som vi så kan omskrive til en parameterfremstilling. Prøv selv!

Øvelse 39

En cirkel har centrum i $C(1,2)$ og radius 5.

Bestem en parameterfremstilling for tangenten til cirklen i $P(4,6)$.

Eksempel: Skæring mellem linjer givet ved parameterfremstillinger

En linje m i planen er parallel med $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og går gennem punktet $P_0(4,5)$.

En anden linje l i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.

Vi opskrifter en parameterfremstilling for m :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+s \\ 5-2 \cdot s \end{pmatrix}$$

og ser, at retningsvektorer ikke er parallelle, så linjerne skærer hinanden. Overvej selv dette!

Metode 1: Værktøjsprogram

Vi bestemmer parameterværdierne i skæringspunktet mellem de to linjer ved at løse to ligninger med to ubekendte, idet vi sætter koordinatsættene lig med hinanden, dvs.

$$\begin{pmatrix} 4+s \\ 5-2 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \cdot t \\ -2+3 \cdot t \end{pmatrix}$$

$$4+s=4+2 \cdot t$$

$$5-2 \cdot s=-2+3 \cdot t$$

Vi har således et ligningssystem med to ligninger og to ubekendte s og t .

Disse kan løses i hånden fx ved lige store koefficienters metode. Her bruger vi et værktøjsprogram:

$$\text{solve} \left(\begin{cases} 4+s=4+2 \cdot t \\ 5-2 \cdot s=-2+3 \cdot t \end{cases}, s, t \right) \triangleright s=2 \text{ og } t=1$$

Koordinatsættet til skæringspunktet bestemmes nu ved at indsætte fx $t=1$ i l :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollere selv resultatet ved at indsætte $s=2$ i m

2. Metode: 2D-geometriprogram

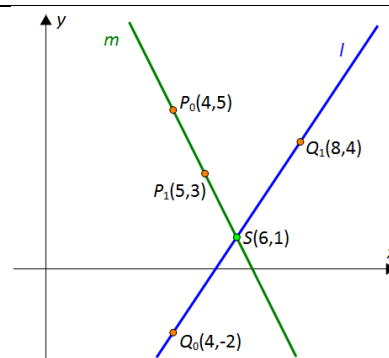
Har vi et geometriprogram til rådighed, kan vi konstruere de to linjer ud fra to punkter på hver af linjerne:

Linjen l : sæt $t=1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ dvs. } P_1(5,3)$$

Linjen m : sæt $t=2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dvs. } Q_1(8,4)$$



Vi plotter de fire punkter ind og konstruere linjerne, hvorefter vi bestemmer skæringspunktet mellem de to linjer ved en indbygget kommando i værktøjsprogrammet.

Bemærk, at begge metoder også virker for linjer i rummet, hvor vi får oplyst, at linjerne rent faktisk skærer hinanden (ikke er vindskeve), her får vi blot tre ligninger med 2 ubekendte.

Øvelse 40

En linje m i rummet er parallel med $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, og går gennem punktet $P_0(5, 4, -2)$.

a) Opskriv en parameterfremstilling for m .

En anden linje l i rummet er givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Det oplyses, at de to linjer l og m skærer hinanden i et punkt S .

b) Bestem koordinatsættet til S ved 1. metode: Løsning af et ligningssystem i et værktøjsprogram.

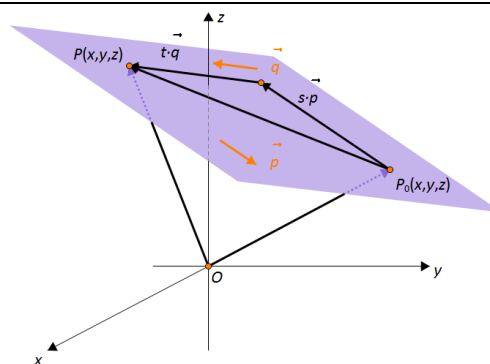
c) Kontroller resultatet ved konstruktion i et 3D-geometriprogram.

3.4 Parameterfremstillingen for en plan i rummet

En plan α i rummet kan også beskrives ved en parameterfremstilling efter samme principper som ovenstående, blot skal vi ud over et fast punkt i planen kende to vektorer der udspejler planen. Vi lader $P_0(x_0, y_0, z_0)$ betegne det faste punkt i planen, og vi lader $\vec{p}$ og $\vec{q}$ betegne to ikke-parallele vektorer, der begge er parallelle med planen.

Vi lader punktet $P(x, y, z)$ betegne et variabelt punkt på planen, dvs. vektoren $\vec{P_0P}$ falder sammen med planen, og da planen er udspejlet af $\vec{p}$ og $\vec{q}$, så findes to skalarer s og t , således at

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= s \cdot \vec{p} + t \cdot \vec{q} \\ \vec{OP} - \vec{OP_0} &= s \cdot \vec{p} + t \cdot \vec{q} \\ \vec{OP} &= \vec{OP_0} + s \cdot \vec{p} + t \cdot \vec{q} \end{aligned}$$



Vi omskriver til koordinatform, idet vi sætter $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, og vi får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } s, t \in \mathbb{R}.$$

Øvelse 41

En plan α er udspejlet af $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, og α indeholder origo $O(0, 0, 0)$.

Opskriv parameterfremstillingen for α .

Øvelse 42

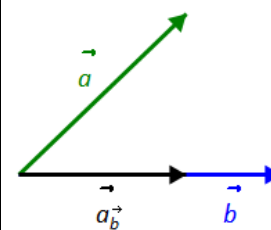
Punkterne $A(2,6,-4)$, $B(-6,-4,3)$ og $C(5,-4,0)$ ligger i en plan α .

Opskriv en parameterfremstilling for α .

4. Projektioner i plan og rum

Vi har i afsnit 2 defineret, hvad vi forstår ved projektioner af punkter og vektorer. Slå evt tilbage og se illustrationerne dér. Givet to vektorer, kan vi altid afsætte repræsentanter ud fra et fælles punkt. Punktet og de to vektorer udspænder en plan, så vi kan altid betragte projektioner, som noget der foregår i en plan.

Vi vil nu vise, hvordan man kan bestemme en projektionsvektors koordinatsæt og dens længde i forskellige sammenhænge i planen og i rummet.



4.1 Projektion af vektor på vektor i plan og rum

Sætning 11: Projektion af vektor på vektor i plan og rum

Der er givet to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er bestemt ved vektoren:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}, \text{ der har længden: } |\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

hvor $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ betegner den numeriske værdi af skalarproduktet.

Bemærk, at $\vec{a}_b$ har samme retning som $\vec{b}$, hvis tallet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er positivt, modsat retning, hvis $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er negativt, og at $\vec{a}_b$ er nulvektoren, hvis $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er nul. I det sidste tilfælde er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale.

Opskriv selv formelen for projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$!

Bevis:

Vi gennemfører beviset med illustrationen i planen, som udgangspunkt. Vi kalder projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ for $\vec{a}_b$, som vist på figuren. Da $\vec{a}_b$ og $\vec{b}$ er parallelle, så findes således et tal s , så:

$$\vec{a}_b = s \cdot \vec{b}$$

Den vektor, der repræsenteres af pilen fra spidsen af $\vec{a}_b$ til spidsen af $\vec{a}$ (se illustrationen) kaldes for $\vec{a}$'s normalprojektion og betegnes $\vec{a}_n$. Ud fra definitionen på projektion gælder, at $\vec{a}_n$ er ortogonal på $\vec{b}$. Vi har nu:

$$\vec{a} = \vec{a}_b + \vec{a}_n$$

$$\vec{a} = s \cdot \vec{b} + \vec{a}_n$$

$$\text{Indsæt } \vec{a}_b = s \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (s \cdot \vec{b} + \vec{a}_n) \cdot \vec{b}$$

$$\text{Prik med } \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = s \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a}_n \cdot \vec{b}$$

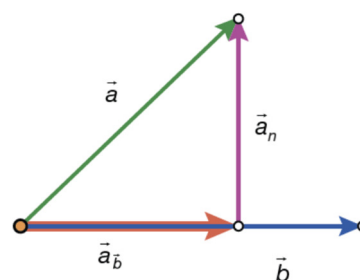
$$\text{Udnyt regneregler for skalarprodukt}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = s \cdot |\vec{b}|^2$$

$$\text{Udnyt bla., at } \vec{a}_n \perp \vec{b}$$

$$s = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\text{Isoler } s$$



Indsættes nu udtrykket for s i $\vec{a}_b = s \cdot \vec{b}$ får vi den første formel.

Formlen for længden af projektionen får vi af følgende udregning:

$$|\vec{a}_b| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \right| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

hvor vi har anvendt, at der for et tal t og en vektor $\vec{v}$ gælder: $|t \cdot \vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}|$.

Overvej selv hvorfor denne formel gælder (anvend definitionen på $t \cdot \vec{v}$).



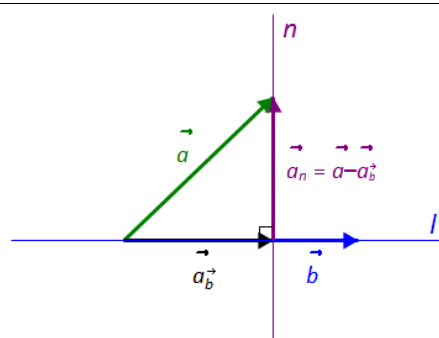
Af sætning 11 følger:

Sætning 12: Normalprojektion

Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$\vec{a}$'s normalprojektion til vektor $\vec{b}$, der betegnes $\vec{a}_n$, er bestemt ved:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$



Bevis:

Resultatet ses ved figurbetragtning!

Eksempel: Projektion af vektor på vektor

Metode 1: Håndregning

To vektorer i planen er givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi vil bestemme $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$.

Vi udregner først skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 = 10 > 0,$$

hvilket svarer til at projektionsvektoren er ensrettet med $\vec{b}$.

Vi bestemmer længden af $\vec{b}$:

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ved indsættelse i formelen får vi derfor:

$$\vec{a}_b = \frac{10}{5^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Metode 2: Værktøjsprogram

Vi definerer først de to vektorer:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

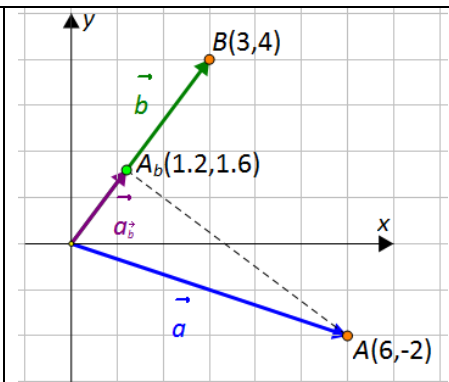
og derefter udregner vi projektionen med de indbyggede kommandoer til beregning af skalarprodukt og længden af en vektor fx:

$$\vec{a}_b = \frac{\text{dotp}(\vec{a}, \vec{b})}{\text{norm}(\vec{b})^2} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Metode 3: 2D-geometriprogram

Afsæt de to vektorer som stedvektorer for de to punkter $A(6, -2)$ og $B(3, 4)$. Herefter konstrueres en linjegenennem A og vinkelret på $\vec{b}$. Skæringspunktet mellem denne linje og $\vec{b}$ er projektionen af punktet A på $\vec{b}$, som vi her har kaldt A_b . Da projektionsvektoren bliver stedvektor for A_b , får den samme koordinater. Vi aflæser koordinaterne for projektionspunktet $A_b(1.2, 1.6)$, og vi konkluderer:

$$\vec{a}_b = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix}.$$



Bemærk, at alle tre metoder også kan anvendes ved bestemmelse af projektioner i rummet – Her anvender man så blot et 3D-geometriprogram i stedet.

Øvelse 43

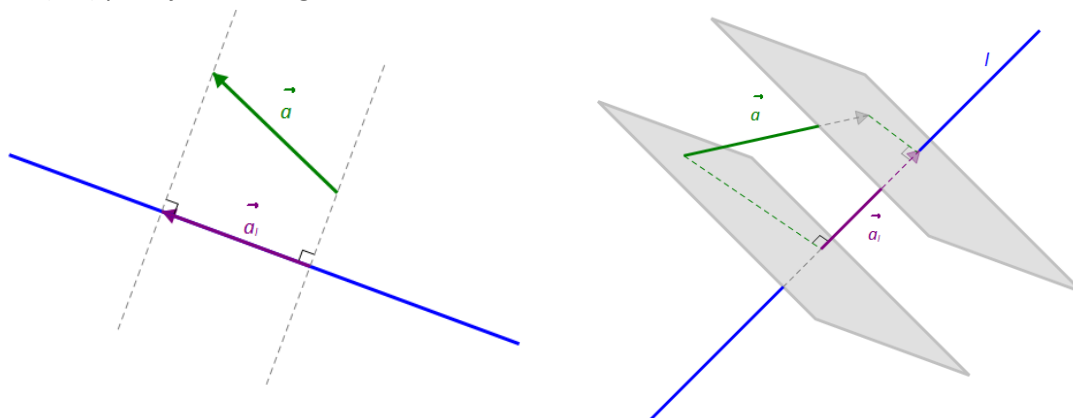
To vektorer i planen og to vektorer i rummet er givet ved:

$$\text{Plan: } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Rum: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestem $\vec{a}$'s projektion $\vec{a}_b$ på $\vec{b}$, og bestem $\vec{b}$'s projektion $\vec{b}_a$ på $\vec{a}$. Vælg selv metode.

4.2 Projektion af vektor på linje i plan og rum

Vi har nu en metode til at projicere en vektor på en vektor, og som nævnt i indledningen giver denne metode os også løsningen på at projicere en vektor $\vec{a}$ ned (ind) på en linje l i plan og rum, fordi vi bare skal projicere vektoren ned (ind) på linjens retningsvektor.



Vi vil projicere $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ned på linjen l med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$

Ved indsættelse i projektionsformlen får vi:

$$\vec{a}_l = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}_l}{|\vec{r}_l|^2} \cdot \vec{r}_l = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}{(\sqrt{49+1+16})^2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{35}{66} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,77 \\ 0,68 \\ -2,73 \end{pmatrix}$$

Øvelse 44

En linje m i rummet har parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Bestem projektionen af $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ på m ved beregning

b) Arbejder du i et 3D-geometriprogram, så løs samme opgave ved først at bestemme to punkter på linjen.

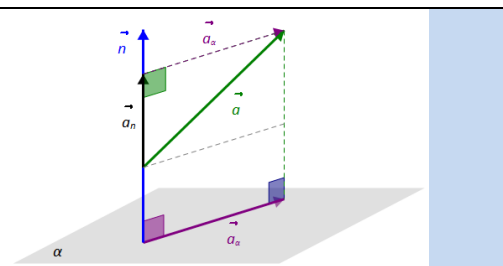
4.3 Projektion af vektor i plan i rummet

Når vi skal projicere en vektor $\vec{a}$ ned i en plan α kunne vi vælge at projicere de to endepunkter for en repræsentant ned i α , og ud fra disse bestemme projektionsvektoren. Det er imidlertid lettere at gå en lille omvej, inspireret af sætning 12 om normalprojektion. Der gælder nemlig følgende sætning:

Sætning 13: Projektion af en vektor på en plan i rummet

Lad $\vec{a}$ være en egentlig vektor i rummet. Projektionen $\vec{a}_\alpha$ ned i en plan α , der har normalvektor $\vec{n}$, er givet ved differensvektoren mellem $\vec{a}$ og $\vec{a}$'s projektion på $\vec{n}$:

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_n \quad \text{dvs.} \quad \vec{a}_\alpha = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$



Bevis:

Af figuren fremgår det, at $\vec{a}_n + \vec{a}_\alpha = \vec{a}$, altså er $\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_n$. Projektionen $\vec{a}_n$ af $\vec{a}$ på $\vec{n}$ bestemmer vi ved projektionsformlen:

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$

og dermed er $\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$.

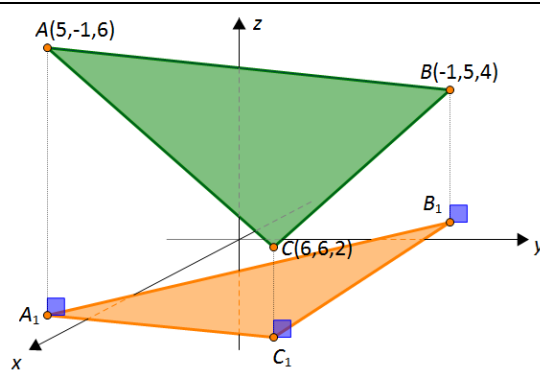


Bemærkning. Hvis $\vec{a}$ er parallel med α , så er $\vec{a}_\alpha = \vec{a}$.

Øvelse 45

På figuren ses trekant ABC i rummet, hvor koordinatsættene til hjørnepunkterne er angivet. Opgaven kan løses både ved beregning og ved konstruktion i et 3D-geometriprogram. Metoderne er sidestillede. Har du adgang til et geometriprogram, så kan du løse dem med begge metoder, og sammenligne: Hvilken er lettest? Og hvilken metode giver det bedste overblik?

a) Bestem vektorerne $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ og $\vec{AC}$, og bestem deres projektionsvektorer i xy -planen



b) Undersøg, om projektionen af højden fra C i trekant ABC svarer til højden fra C_1 i trekant $A_1B_1C_1$.

Vink: Betragt vi højden som en vektor $\vec{HC}$, hvor H er fodpunktet for højden, så er $\vec{HC} = \vec{AC} - \vec{AH}$, hvor $\vec{AH}$ jo er $\vec{AC}$'s projektion på $\vec{AB}$. Tilsvarende kan højden i trekant $A_1B_1C_1$ bestemmes og sammenlignes med $\vec{HC}$'s projektionsvektor.

5. Determinanten for et vektorpar i planen

Skalarproduktet af en vektor og en anden vektors tværvektor, dvs. udtrykket $\hat{a} \cdot \vec{b}$ viser sig at være anvendeligt i flere sammenhænge, og man har derfor indført en særlig betegnelse for dette.

Definition 2: Determinanten af et vektorpar

Determinanten af et par vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er defineret som skalarproduktet af tværvektoren til

$$\vec{a} \text{ med } \vec{b}: \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

Øvelse 46

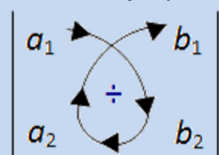
Vis, at $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$, og at det betyder, at $\hat{a} \cdot \vec{b} = -\hat{b} \cdot \vec{a}$.

Praxis: Determinantsymbol og huskeregel

Af og til benyttes et særligt determinantsymbol, som består af to lodrette streger, hvor inden for vektorernes koordinater er placeret i et talskema:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Det kan være en hjælp til at huske beregningen, at man regner i en sløjfe inde i talskemaet:



Øvelse 47

Bestem determinanten af følgende vektorpar:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Sætning 14: Parallelle vektorers determinant

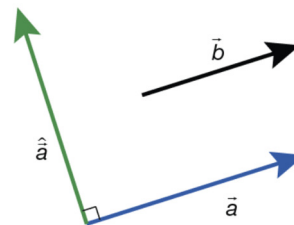
Et par af egentlige vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er parallelle netop når determinanten er nul:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ netop når } \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Bevis:

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ være ortogonale, og derfor er deres skalarprodukt nul: $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 0$. Dermed er $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Omvendt, hvis determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er nul, så er $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = 0$, dvs. $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{b}$ må være ortogonale, men da $\hat{\vec{a}}$ og $\vec{a}$ også er ortogonale, så må $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være parallelle. ✓



Øvelse 48: Bestemmelse af parameter for parallelle vektorer

For hvilke værdier af s er følgende vektorpar parallelle?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ s+1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ s+1 \end{pmatrix}$

Da determinanten af et vektorpar er defineret som et skalarprodukt, og da vi ved dette er uafhængigt af koordinatsystemet, så er determinanten også uafhængigt af koordinatsystemet – dog skal man huske, at tværvektoren jo er bestemt ved en *positiv* drejning, dvs. omløbsretningen for det valgte koordinatsystem skal være den samme.

Sætning 15: Determinant og vinkel mellem vektorer

Determinanten af et par af vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kan beregnes ved produktet af de to vektorers længder og sinus til vinklen mellem vektorerne, dvs.:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

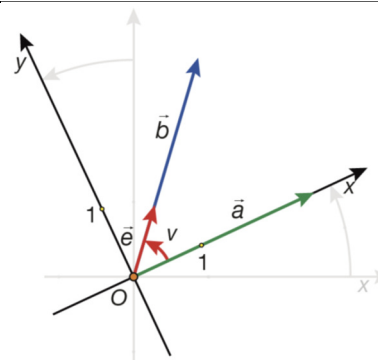
hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, regnet med fortegn i forhold til om løbsretningen

Bevis:

Vi vælger et koordinatsystem, så $\vec{a}$ ligger langs med og er ensrettet med x -aksen. Drejningsvinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ regnes med fortegn.

På den øverste figur er drejningsvinklen positiv, mens den på den nederste figur er negativ.

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ får så koordinatsættene:



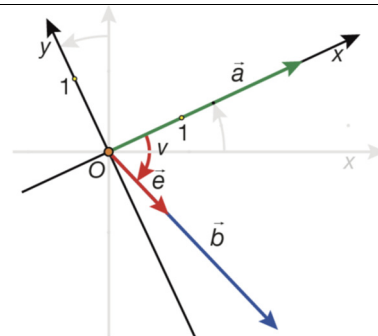
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Overvej dette, specielt hvorfor koordinatsættet har samme form i de to tilfælde!

Tværvektoren til $\vec{a}$ er derfor givet ved: $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix}$,

og udregner vi determinanten, $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$, så får vi:

$$\hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix} = 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$



Bemærkning: Hvis $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, så findes der ingen vinkel mellem de to vektorer og determinanten sættes lig med nul.

Hvis blot $\vec{a} = \vec{b}$, så bekræfter sætningen relationen mellem en vektor og dens tværvektor:

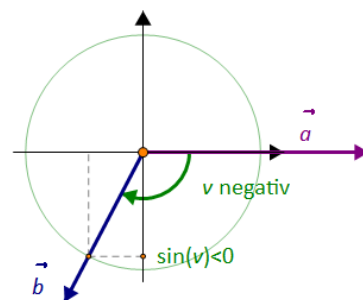
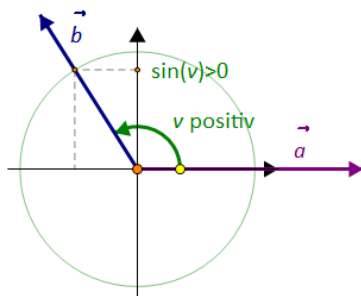
$$\hat{\vec{a}} \cdot \vec{a} = |\hat{\vec{a}}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(0^\circ) = 0$$

Praxis: Determinanten i et værktøjsprogram

Den nemmeste måde, at bestemme determinanten i et værktøjs program er at udnytte en indbygget kommando af samme type som determinantsymbolet, hvor koordinater skrives i en kvadratisk matrice.

Determinantens fortegn afhænger af fortegnet for vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, fordi $\sin(-v) = -\sin(v)$, dvs. hvis vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er negativ, så er determinanten af de to vektorer negativ.

Med vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ menes altid den mindste drejningsvinkel fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.



Der gælder således (se illustrationerne):

Fortegn for vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$	Fortegn for sinus	Fortegn for determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$
$0^\circ \leq v < 180^\circ$:	$\sin(v) > 0$	$\det(\vec{a}, \vec{b}) > 0$
$v = 0^\circ$ eller $v = 180^\circ$:	$\sin(v) = 0$	$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
$-180^\circ < v < 0^\circ$:	$\sin(v) < 0$	$\det(\vec{a}, \vec{b}) < 0$

Øvelse 5.58

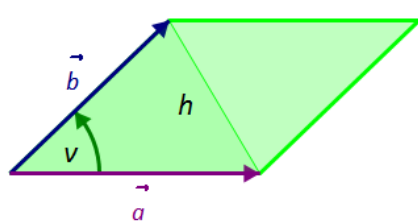
a) Udregn determinanten af følgende vektorpar i et værktøjsprogram:

$$1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 2) \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

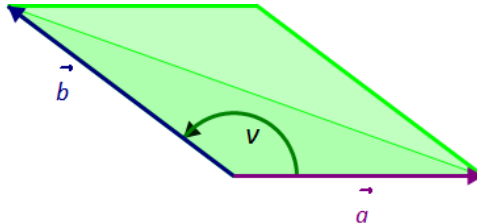
b) Kontroller fortegnet for drejningsvinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ ved konstruktion i et 2D-geometriprogram:

<Øvelse 5.slut>

Ligesom i trigonometrien vil vi også med vektorer gerne kunne beregne arealer af plane polygoner, dvs. af trekanter, fordi alle andre plane polygoner vil kunne trianguleres. Sætning 16 giver os en formel til beregning af arealet af det parallellogram (og den trekant), som udspringer af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



Figur 1



Figur 2

Sætning 36: Areal af parallelogram / trekant udspændt af to vektorer

Arealet af det parallelogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, kan beregnes ved:

$$A_{\text{parallelogram}(\vec{a}, \vec{b})} = |\det(\vec{a}, \vec{b})| = |\hat{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

hvor $0 \leq v \leq 180^\circ$ er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Arealet af den trekant, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, kan beregnes ved:

$$T_{\text{trekant}(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{a}, \vec{b})| = \frac{1}{2} \cdot |\hat{a} \cdot \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Bevis

Fra trigonometrien ved vi, at arealet af trekanten bestemt ved de to repræsentanter for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lig med

$$T_{\text{trekant}(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

I trekanter regner vi altid vinklerne positive. I koordinatgeometri regner vi vinkler med fortegn. Derfor skal vi her sætte numerisk tegn om udtrykket:

$$T_{\text{trekant}(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} \cdot ||\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)|$$

Sætning 15 giver nu:

$$T_{\text{trekant}(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{a}, \vec{b})| \quad \text{og} \quad A_{\text{parallelogram}(\vec{a}, \vec{b})} = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

hvilket er påstanden i sætningen.

<bevis slut>

Øvelse 5.59

a) Bestem arealet af trekanten udspændt af de to vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Indtegn vektorerne i et 2D-geometriprogram, og bestem arealet med programmet indbyggede kommando.

Øvelse 5.60

De tre punkter $A(-3, 1)$, $B(2, 7)$ og $C(10, 6)$ udspænder en trekant i planen. Bestem trekantens areal ved beregning og ved konstruktion i et 2D-geometriprogram.

Opgaver

På [hjemmesiden](#) ligger opgaver i tilknytning til afsnit 6.

7. Vektorprodukt (krydsprodukt)

I planen (2D) kan vi konstruere en vektor vinkelret på én given vektor ved at danne dennes tværvektor.

Vi ønsker tilsvarende i rummet (3D) at kunne konstruere en vektor vinkelret på to givne (ikke-parallele) vektorer.

Dette opfyldes af det såkaldte *vektorprodukt* (også kaldet: *krydsprodukt*):

Definition: Vektorprodukt (krydsprodukt) af to vektorer i rummet

Givet to vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Vektorproduktet (eller: krydsproduktet) af de to vektorer er en vektor, der står vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Vektoren betegnes $\vec{a} \times \vec{b}$ og har koordinaterne: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

Vi forklarer nedenfor, hvordan denne formel kommer til veje.

Praxis: Udregning af et krydsprodukt i hånden

Givet $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Opskriv koordinaterne i talblokke således:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \text{ dvs. } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Hver af determinanterne er så lig med den koordinat til krydsproduktet, som de røde tal angiver.

Øvelse 5.61

- Kontroller, at metoden giver det korrekte resultat, dvs. det som står i definitionen.
- Udregn $\vec{a} \times \vec{b}$ med ovenstående taleksempel og undersøg, om $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Praxis: Vektorprodukt i et værktøjsprogram

Værktøjsprogrammer har en indbygget kommando til bestemmelse af vektorproduktet. Kommandoen kan fx hedde: $\text{crossP}(\vec{a}, \vec{b})$ (på engelsk bruges også betegnelsen krydsprodukt). Det foregår således:

Givet $\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Kommandoen $\text{crossP}()$ giver så $\vec{n} := \text{crossP}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Øvelse 5.62

- Bestem krydsproduktet af følgende vektorpar ved hjælp af definitionen

$$1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 2) \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Kontroller resultaterne med et værktøjsprogram.

- Undersøg om $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

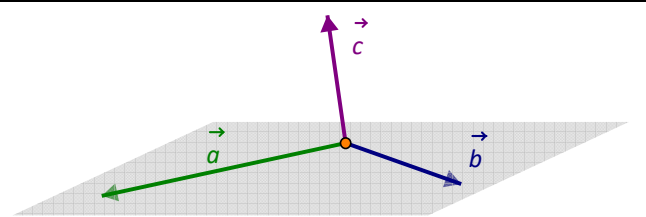
Øvelse 5.63

- Vis, at krydsproduktet bliver 0, hvis en af vektorerne er nulvektoren.
- Vis, at krydsproduktet bliver 0, hvis vektorerne er parallelle (dvs proportionale). (Vink: indsæt $\vec{a} = s \cdot \vec{b}$)

Krydsproduktets retning

Betragter vi tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ i rummet, så siger vi, at vektorerne danner et højresystem, når vi kan danne en model af de tre vektorer i rækkefølge med højrehåndens tommel-, pege- og langfinger. Sammenlign med den måde, vi indførte det tredimensionelle koordinatsystem.

Krydsproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og er yderligere konstrueret så $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ udgør et højresystem. Et bevis herfor gives i sætning**



Figur 3

Begrundelse for formelen for vektorproduktet (krydsproduktet).

Bemærk, at argumentationen bygger på løsning af ligningssystemer med determinantmetoden. Denne er forklaret i afsnit ** om anvendelser.

Givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Den vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vi søger, skal være ortogonal til både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Dette kan

vi udtrykke med skalarprodukt: Koordinaterne til vektor $\vec{x}$ skal opfylde ligningssystemet:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0$$

(*) <udfor ligningssystemet>

$$b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 = 0$$

Vi antager nu, at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle. Så er (a_1, a_2, a_3) og (b_1, b_2, b_3) ikke proportionale. Vi kan derfor antage, at fx (a_1, a_2) og (b_1, b_2) ikke er proportionale. (Overvej dette!)

Disse to kan derfor opfattes som to ikke parallelle vektorer i xy-planen, hvis determinant ikke er nul.

Ligningssystemet (*) omskrives derfor til:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = -a_3 \cdot x_3$$

$$b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 = -b_3 \cdot x_3$$

(Var det i stedet fx (a_1, a_3) og (b_1, b_3) som vi vidste ikke er proportionale, så flyttedes x_2 -leddene over)

Derfor må der gælde, at ligningssystemets determinant ikke er nul, dvs.

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi løser ligningssystemet med hensyn til x_1 og x_2 med *determinantmetoden*:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 \cdot a_3 & a_2 \\ -x_3 \cdot b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{D_{12}} = -x_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{D_{12}} = x_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{D_{12}} = x_3 \cdot \frac{D_{23}}{D_{12}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -x_3 \cdot a_3 \\ b_1 & -x_3 \cdot b_3 \end{vmatrix}}{D_{12}} = -x_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{D_{12}} = x_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{D_{12}} = x_3 \cdot \frac{D_{31}}{D_{12}}$$

Dvs. vi har fået x_1 og x_2 udtrykt ved x_3 . Ligningssystemet er opfyldt for enhver værdi af x_3 . Sætter vi $x_3 = D_{12}$, får vi det simplest mulige udtryk for de tre koordinater:

$$x_1 = D_{12} \cdot \frac{D_{23}}{D_{12}} = D_{23}$$

$$x_2 = D_{12} \cdot \frac{D_{31}}{D_{12}} = D_{31}$$

$$x_3 = D_{12}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{23} \\ D_{31} \\ D_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Bemærk, at vi i den sidste omskrivning har byttet om på tallene i den ene diagonal, så vi får koordinatsættene til de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, placeret under hinanden. (Overvej, hvorfor vi kan gøre det!)

Vi ser altså, at den vektor, hvis koordinater er bestemt af de tre determinanter:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, D_{31} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{ og } D_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

opfylder kravet om at være ortogonal til de to oprindelige.

Konklusion. Det er så netop denne vektor, vi definerer som vektorproduktet.

Det er således muligt at frembringe en vektor i rummet, der står vinkelret på to egentlig ikke-parallele (dvs. lineært uafhængige) vektorer.

Sætning 17: Vektorprodukt afgør om to vektorer er parallelle

Om to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet gælder:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ er ensbetydende med } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

dvs. to vektorer er parallelle netop når deres vektorprodukt er nulvektoren.

Bevis:

Vi har i øvelse** vist, at hvis vektorerne er parallelle, så er $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Antag nu omvendt, at $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Så er de tre determinanter i definitionen lig med 0. Men

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ betyder at } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ er parallel med } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ så der findes et } s, \text{ så: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot b_1 \\ s \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ betyder at } \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ er parallel med } \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ så der findes et } t, \text{ så: } \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot b_2 \\ t \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ betyder at } \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ er parallel med } \begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 \end{pmatrix}, \text{ så der findes et } u, \text{ så: } \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot b_3 \\ u \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Mindst en af b 'erne er forskellig fra 0, fx b_2 . Derfor kan vi dividere med b_2 , og derved få:

$$s = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{og} \quad t = \frac{a_2}{b_2},$$

hvoraf vi ser, at $s = t$. Men så er 3D-vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ proportionale, dvs parallelle.

<Bevis slut>

Bemærk, at der heraf også følger, at $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Sætning 18: Regneregler for vektorproduktet

Vektorproduktet opfylder følgende regneregler:

1. $(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s \cdot \vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, dvs. når en vektor i krydsproduktet forlænges/forkortes, så ændres krydsproduktets længde tilsvarende.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, dvs. den kommutative lov gælder ikke, fordi når faktorernes orden ændres, så skal man skifte fortegn.
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, dvs. den distributive lov er opfyldt, så vi kan "krydse" ind i en parentes på sædvanlig vis.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$, dvs. at man kan bestemme vektorproduktet af to flerleddede størrelser på sædvanlig vis.

Øvelse 5.64 Bevis for sætning 18

a) Vis punkt 1 og 2 ud fra definitionen

b) Vis, at punkt 4 følger af punkt 3 og 2.

c) Vis punkt 3 med brug af dit værktøjsprogram. Den er ret besværlig at vise i hånden. På hjemmesiden kan du se udregningerne.

d) Den associative lov $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ gælder i almindelighed ikke. Giv et modeksempel, dvs angiv tre vektorer, hvor der gælder $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Sætning 4: Vektorproduktet er uafhængigt af koordinatsystem

Vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ af to egentlige ikke-parallele vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet afhænger ikke af det valgte koordinatsystem.

Bevis:

Vi anvender formelen: $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$.

Et bevis for denne kræver forholdsvis lange udregninger. Der ligger et sådant bevis på *hjemmesiden*. Tjek evt. selv med et værktøjsprogram. Ud fra denne formel får vi nu:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad \text{Flyt skalarproduktet over}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \quad \text{Tag kvadratroden}$$

dvs. længden af vektorproduktet afhænger således kun af vektorernes længder samt skalarproduktet, som jo er uafhængig af det valgte koordinatsystem, altså er længden af vektorproduktet uafhængigt af vores valg af koordinatsystem (blot enheden holdes fast).

<Bevis slut>

I argumentationen for krydsproduktets formel så vi, at vi i den afsluttende fase havde et frit valg mht. størrelsen af 3. koordinat. Vi foretog et valg dikteret af, at få en så enkelt formel som mulig. Dette frie valg af den ene koordinat betyder geometrisk, at der er uendeligt mange vektorer der er ortogonale på de to oprindelige. Vi kan jo blot skalere det fundne krydsprodukt op eller ned, så er det stadigvæk en ortogonal vektor. Men den definition, vi har valgt, viser sig at have flere smukke og praktiske egenskaber. De vigtigste er følgende:

Sætning 5: Vektorprodukts retning og længde

Givet to ikke-parallele egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Krydsproduktet $\vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b}$ opfylder følgende:

1. De tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b}$ danner et højresystem.
2. $|\vec{n}_\alpha| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\nu)$, hvor $\nu = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, dvs. længden af $\vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b}$ er lig med arealet af det parallelle elogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder.

Bevis:

Bevis for punkt 1:

Vi kan ifølge sætning 17 frit lægge koordinatsystemet. Vi lægger det, så $\vec{a}$ er parallel med x-aksen og $\vec{b}$ ligger i xy-planen, således at vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er positiv. Derved bliver deres z-koordinater nul. Krydsproduktets x- og y-koordinater bliver så 0, og z-koordinaten bliver:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\nu)$$

hvor ν er vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ regnet med fortegn, dvs. $0^\circ < \nu < 180^\circ$, altså er $\sin(\nu) > 0$, og dermed er $(\vec{a} \times \vec{b})_z > 0$. Det betyder, at $\vec{a} \times \vec{b}$ er ensrettet med z-aksen, altså danner de tre vektorer et højresystem. Vi kan således bestemme retningen af en normalvektor i forhold til planen ved hjælp af højrehåndsreglen: Hvis $\vec{a}$ = tommelfinger og $\vec{b}$ = pegefinger, så er $\vec{a} \times \vec{b}$ = langfinger.

Bevis for punkt 2:

Vi anvender igen formelen $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu))^2 \quad \text{Udnyt, at } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\nu)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos(v))^2$$

Anvend potensregel

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - (\cos(v))^2)$$

Sæt $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ udenfor parentes

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\sin(v))^2$$

Udnyt, at $(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$

Tag kvadratroden, alle faktorer er positive.

Heraf følger punkt 2, da vi jo allerede ved, at arealet af det parallelogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, er bestemt ved $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$.

<Bevis slut>

Praxis: Vektorprodukt til arealberegninger i rummet

Arealet af det parallelogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder i en plan α beregnes ved:

$$\text{areal}_{\text{pl}}(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{n}_{\alpha}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v), \quad v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

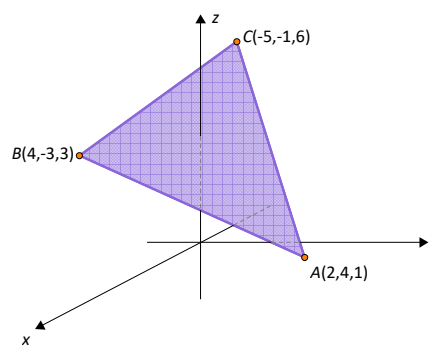
Arealet af den trekant, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder i en plan α beregnes ved:

$$\text{areal}_{\text{t}}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{n}_{\alpha}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v), \quad v = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Øvelse 5.65

En trekant i rummet er bestemt af de tre punkter $A(2, 4, 1)$, $B(4, -3, 3)$ og $C(-5, -1, 6)$, som vist på figuren.

- Bestem arealet af trekanten ud fra en selvvalgt metode.
- Kontroller dit resultat ved at anvende en af de andre metoder.



Figur 4

Øvelse 5.66 Arealer og diagonaler

- Vis, at $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ud fra regnereglerne.
- Benyt denne formel til at argumentere for, at der gælder følgende om et parallelogram:
Længden af diagonalvektorenes krydsprodukt er lig med det dobbelte af parallelogrammets areal.

Opgaver

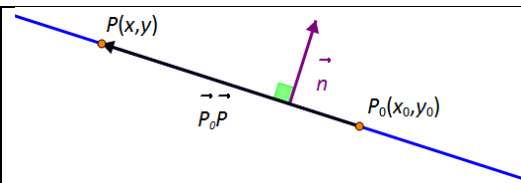
På hjemmesiden ligger opgaver i tilknytning til afsnit 7.

8. Linjer og planer

I afsnit 4 beskrev vi en ret linje ved dens parameterfremstilling, dvs. ud fra ét punkt og en *retningsvektor*. Nu vil vi vise, at vi kan fastlægge en ret linje i en plan ved en ligning ud fra ét punkt og en *normalvektor*. Tilsvarende kan vi i 3D fastlægge en plan i rummet ved en ligning ud fra et punkt i planen og en normalvektor til planen.

Ligningen for en linje i 2D

Lad $P(x_0, y_0)$ være et fast punkt på l , og lad $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ være en normalvektor for l , dvs. $\vec{n} \neq \vec{0}$ og $\vec{n} \perp l$.
Linjen består således af alle de punkter $P(x, y)$, hvor $\vec{n} \perp \vec{P_0P}$.



Altså må skalarproduktet af de to vektorer være nul. Vi får:

Figur 5 Til Andreas: Problem med sketchpads betegnelse af $\overrightarrow{P_0P}$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

Vi har regnet ensbetydende, og har hermed vist følgende sætning:

Sætning 6: Ligningen for en ret linje i planen 1

En ret linje i planen er fastlagt ved ligningen: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$, hvor $P_0(x_0, y_0)$ er et fast punkt på

linjen og $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, er en normalvektor til linjen.

Bemærk, at linjen bliver vandret, når $a = 0$, og lodret, når $b = 0$, dvs. når normalvektoren er parallel med henholdsvis y -aksen og x -aksen.

Ser vi nærmere på udtrykket og ganger parenteserne ud, så får vi:

$$a \cdot x - a \cdot x_0 + b \cdot y - b \cdot y_0 = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y + (-a \cdot x_0 - b \cdot y_0) = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

hvor vi har sat det konstante udtryk, der kun indeholder kendte tal, nemlig det fast punkts koordinater og normalvektorens koordinater, lig med en ny konstant c . Dvs. enhver linje i planen har en ligning på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

Men omvendt gælder det også, at ethvert udtryk på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, hvor $(a, b) \neq (0, 0)$, beskriver en ret linje i planen, fordi vi kan omskrive udtrykket:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$a \cdot x - (-a \cdot \frac{c}{a}) + b \cdot y - b \cdot 0 = 0$$

$$\text{Udnyt omskrivningen } c = a \cdot \frac{c}{a} = -(-a \cdot \frac{c}{a}) \text{ og at } a \neq 0$$

$$a \cdot \left(x - \frac{c}{a} \right) + b \cdot (y - 0) = 0$$

$$\text{Sæt } a \text{ udenfor og sæt } b \text{ udenfor parentes}$$

Men her står en ligning på formen: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$.

Dvs ligningen fremstiller linjen gennem punktet $P_0(x_0, y_0) = (-\frac{c}{a}, 0)$ og med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vi kunne naturligvis på samme måde i stedet for $a \neq 0$ have antaget at $b \neq 0$ (de må bare ikke være nul samtidig), og på den måde fået et andet fast punkt på linjen. Vi har således vist:

Sætning 7: Ligningen for en ret linje i planen 2

Ligningen

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \text{ hvor } (a, b) \neq (0, 0)$$

beskriver en ret linje i planen med normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Øvelse 5.67

Angiv normalvektorer til linjerne med følgende ligninger:

$$a) 5x - 2y + 3 = 0$$

$$b) x + 2y = -4$$

$$c) 2x + 6 = 0$$

Øvelse 5.68

En linje er givet ved ligningen $-x + 4y + 10 = 0$.

Afgør om punkterne $P(2, -2)$, $Q(20, -20)$ og $R(10, 0)$ ligger på linjen:

Øvelse 5.69

En ret linje l er fastlagt ved normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ og punktet $P_0(-2, 4)$.

- Bestem en ligning for l på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.
- Bestem en parameterfremstilling for l .

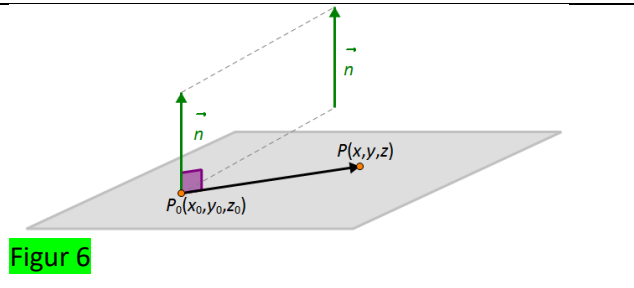
Ligningen for en plan i 3D

Helt analogt til ovenstående kan vi bestemme en ligning for en plan i rummet.

Lad $P(x_0, y_0, z_0)$ være et fast punkt i en plan α , og

lad $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ være en normalvektor for planen, dvs.

$\vec{n} \neq \vec{0}$ og $\vec{n} \perp \alpha$ (se figuren).



Planen består således af alle de punkter $P(x, y, z)$, hvor $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$.

Altså må skalarproduktet af de to vektorer være nul.

Man kan vise, at der gælder følgende:

Sætning 8: Ligningen for en plan i rummet 1

En plan i rummet er fastlagt ved ligningen: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$, hvor $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er et

fast punkt i planen og $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, er en normalvektor til planen

Øvelse 5.70 Bevis for sætning 21

Bevis sætningen efter samme metode som ved den rette linje i planen.

Som for den rette linje i planen kan vi vise, at enhver plan i rummet har en ligning på formen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, og omvendt, at ethvert udtryk på formen: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, hvor $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ beskriver en plan i rummet, dvs. der gælder følgende:

Sætning 9: Ligningen for en plan i rummet 2

Ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, hvor $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ beskriver en plan i rummet med normalvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Øvelse 5.71 Bevis for sætning 22

Bevis sætningen efter samme metode som ved den rette linje i planen.

Bemærkning 1: Planen bliver parallel med akseplanerne, når et par af koefficienter begge er nul, dvs. når planens normalvektor er parallel med en af akserne:

- Planen er parallel med xy -planen, når $(a, b) = (0, 0)$, dvs. ligningen bliver af typen $z = \text{konstant}$
- Planen er parallel med xz -planen, når $(a, c) = (0, 0)$, dvs. ligningen bliver af typen $y = \text{konstant}$
- Planen er parallel med yz -planen, når $(b, c) = (0, 0)$, dvs. ligningen bliver af typen $x = \text{konstant}$

Bemærkning 2: Hvis to linjers/planers ligninger er proportionale, så er der tale om sammenfaldne linjer/planer. Det betyder, at hvis vi kan gange alle tallene i den ene ligning med den samme konstant k og få den anden ligning, som

vist nedenfor, så beskriver ligningerne på hver sin måde den samme punktmængde – en linje/plan kan altså have uendelige mange ligninger!

To ligninger for samme linje: $2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 = 0$ og $-4 \cdot x + 8 \cdot y - 6 = 0$ (gang med $k = -2$)

To ligninger for samme plan: $27 \cdot x - 12 \cdot y + 66 \cdot z - 111 = 0$ og $9 \cdot x - 4 \cdot y + 22 \cdot z - 37 = 0$ (gang med $k = \frac{1}{3}$)

Hvis konstantleddet viser sig, at være det eneste, der forbliver forskellig ved en multiplikation, dvs. hvis kun normalvektorerne er proportionale, så betyder det i stedet, at de to linjer/planer er parallelle.

Praxis: Ligningen for en ret linje og ligningen for en plan i et værktøjsprogram

Der er givet et punkt P_0 på linjen/i planen samt en normalvektor $\vec{n}$ for linjen/planen.

Indfør et vilkårligt punkt på linjen/i planen: $P(x, y)$ eller $P(x, y, z)$.

Definer normalvektoren $\vec{n}$. Definer stedvektorer: $\overrightarrow{OP_0}$ og $\overrightarrow{OP}$ og beregn forbindelsesvektoren: $\overrightarrow{P_0P}$.

Udregn linjens/planens ligning med: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, dvs. med kommandoen: $\text{dotP}(\vec{n}, \overrightarrow{P_0P}) = 0$.

Øvelse 5.72

Angiv normalvektorer til planerne med følgende ligninger:

a) $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ b) $4x + y - 3z = -4$ c) $x + y = 0$ d) $3z = 9$

Øvelse 5.73

En plan α er fastlagt ved en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og et punkt $P_0(2, 3, -1)$.

a) Opskriv en ligning for α på formen $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) + d = 0$

b) Omskriv ligningen til formen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$.

Øvelse 5.74

En plan α er givet ved ligningen $3x + y - 4z + 8 = 0$.

a) Afgør om punkterne $P(1, 1, -3)$, $Q(-2, -2, 0)$ og $R(2, 1, -1)$ ligger i planen.

b) Bestem en ligning for den plan, der er parallel med α , og som går gennem $S(1, 2, 3)$

Øvelse 5.75

En plan og en kugle K i rummet er givet ved ligningerne:

$$\alpha: 3 \cdot x - 6 \cdot y + 2 \cdot z - 18 = 0 \quad \text{og} \quad K: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9^2$$

Bestem skæringspunkterne mellem hvert af de to objekter og koordinataksene, idet du udnytter, at når man står på en af koordinataksene, så er de øvrige koordinater lig med nul.

Eksempel: Normalvektor bestemt ved krydsprodukt samt ligningen for en plan

En plan α indeholder punktet $P_0(2, -1, 5)$ og er udspændt af de to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vi vil bestemme en ligning for α .

Som normalvektor for planen anvendes krydsproduktet af de to vektorer:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix} \quad (\text{Kontroller udregningen})$$

Vi kan nu opskrive ligningen for planen:

$$-22 \cdot (x - 2) + 5 \cdot (y + 1) + 23 \cdot (z - 5) = 0$$

$$-22 \cdot x + 5 \cdot y + 23 \cdot z - 48 = 0 \quad (\text{Reducer})$$

Det anbefales altid, at man bruger et værktøjsprogram til beregninger, der involverer krydsproduktet!

Praxis: Normalvektor og ligning for en plan i et værktøjsprogram

Definer de aktuelle vektorer, der udspænder planen α , samt stedvektoren til det faste punkt fx:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Definer og udregn en normalvektor til planen med kommandoen: $\vec{n}_\alpha := \text{crossP}(\vec{a}, \vec{b})$.

Indfør en stedvektor $\vec{OP}$ til et vilkårligt punkt $P(x, y, z)$ i planen, og beregn forbindelsesvektoren $\vec{P_0P}$.

Bestem en ligning for α ved at udregne: $\text{dotP}(\vec{n}_\alpha, \vec{P_0P}) = 0$.

Øvelse 5.76

En plan indeholder punktet $P_0(-7, 1, 2)$ og er udspændt af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Bestem en normalvektor til planen, og bestem en ligning for planen.

Praxis: Konstruktion af en ret linje/en plan i et 2D/3D-geometriprogram

En linje (en plan) er bestemt ved to (tre) punkter. Man kan fx finde disse punkter ved på skift (parvist) at sætte koordinaterne x og y (og z) lig med nul, og bestemme den sidste koordinat.

Bemærk, at nogle 3D-geometriprogrammer beskriver en linje i rummet ved et system af to ligninger, som man selv skal omskrive til en parameterfremstilling ved at lade en af koordinaterne agere parameter, dvs. fx ved at sætte $z = t$, og løse ligningssystemet med hensyn til x og y .

Øvelse 5.77

En plan i rummet er udspændt af de tre punkter $A(5, 1, 2)$, $B(2, -3, 4)$ og $C(-1, 6, 8)$.

- Bestem koordinatsættet til to vektorer, der udspænder planen.
- Bestem en ligning for planen.
- Har du et 3D-værktøj, så løs opgaven ved konstruktion og sammenlign metoderne.

Øvelse 5.78 Eksamensopgave

Figuren viser en model af Denver Museum indtegnet i et koordinatsystem. Alle enheder er i feet.

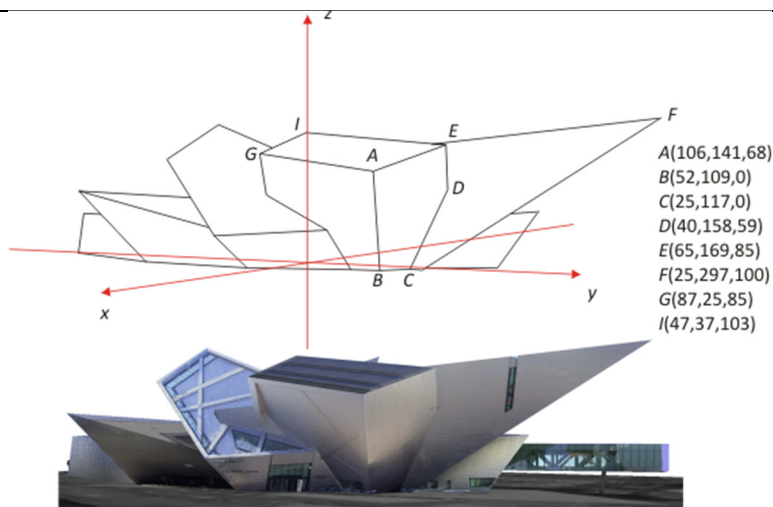
- Bestem en ligning for den plan α , der indeholder punkterne A , B og C .

Det oplyses, at planen β , der indeholder punkterne C , D og F , har ligningen

$$326x + 75y - 135z = 16925.$$

- Undersøg, om $\vec{AE}$ er parallel med $\vec{GI}$, og bestem arealet af tagfladen $AEIG$.

- Kontroller om de fire punkter A , E , I og G ligger i samme plan.



Kilde: sketchup.google.com

Figur 7

Bemærk, at man i anvendelsesopgaver ofte kommer ud for at fire punkter, som på figuren ser ud til at ligge i samme plan, viser sig ikke at gøre det, fordi man ikke kan angive punkter med så stor nøjagtighed!

(Baseret på eksamensopgave stx-A-Matematik, 25052012)

<øvelse slut>

Eksempel: Tangent til en cirkel i planen

En cirkel har ligningen $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 10^2$. Vi vil bestemme en ligning for tangenten til cirklen i punktet $P(13,8)$.

Tangenten står vinkelret på radiusvektoren $\overrightarrow{CP}$. Dvs. $\overrightarrow{CP}$ vil være en normalvektor for tangenten:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 13-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at enhver vektor, der er parallel med $\overrightarrow{CP}$ vil være normalvektor for tangenten, så vi kan vælge at forkorte $\overrightarrow{CP}$ (divider begge koordinater med 11), så vi får normalvektoren: $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Det er ofte en god idé at forkorte normalvektoren, når man regner i hånden, fordi den så er nemmere at regne videre med.

Da P er punkt på tangenten er ligningen for tangenten:

$$1 \cdot (x-13) + 3 \cdot (y-8) = 0$$

$$1 \cdot x + 3 \cdot y - 76 = 0$$

<eksempel slut>

Helt analogt kan vi bestemme en tangentplan til en kugle, idet der blot kommer et led mere på både kuglens ligning og planen ligning svarende til z-koordinaten.

Øvelse 5.79 Tangentplan til kugle i rummet

En kugle har ligningen $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 110$.

a) Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen i punktet $P(7,8,3)$.

b) Har du et 3D-værktøj, så løs opgaven ved konstruktion og sammenlign metoderne.

Opgaver

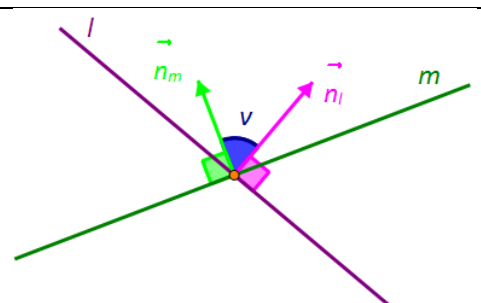
På hjemmesiden ligger opgaver i tilknytning til afsnit 8.

9. Vinkel mellem linjer og planer

I afsnit 2 har vi beskrevet og illustreret linjers og planers indbyrdes beliggenhed. Vi vil nu gennemgå, hvorledes man beregner vinkler mellem linjer og planer.

Det er altid en god hjælp at tegne skitser af den situation, der beskrives. Er der tale om planer og linjer i rummet, er det en god ide at tegne situationen set i profil. Det giver et retvisende billede, og det er nemmere at ræsonnere ud fra dette end ud fra en 3D-tegning.

Figuren kan således både illustrere skæring mellem to linjer i planen og mellem to planer i rummet. Samme figur med andre markeringer af vinklerne kunne også illustrere skæring mellem linje og plan, eller mellem to linjer i rummet.



Figur 122y

I alle opgavetyper beregnes vinklerne ud fra formelen for vinklen mellem to vektorer: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$.

Eksempel: Vinkel mellem linjer i planen

Projekter: fra kapitel 7 Projekt 7.17 Vektorer i 3d og analytisk rumgeometri

Bestem vinklen mellem linjen m givet ved parameterfremstillingen:

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

og linjen l givet ved ligningen:

$$l: 7 \cdot x - 5 \cdot y - 17 = 0$$

Metode 1: Værktøjsprogram:

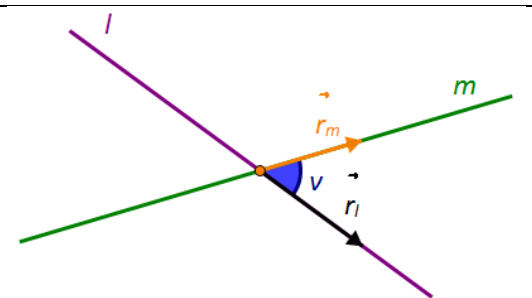
Vi aflæser:

Retningsvektoren for m : $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalvektoren for l : $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Vi bestemmer tværvektoren til l 's normalvektor, så vi har to

retningsvektorer, dvs. $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$



Figur 122x

Vi indsætter i skalarproduktformlen:

$$\cos(v) = \frac{\vec{r}_m \cdot \vec{r}_l}{|\vec{r}_m| \cdot |\vec{r}_l|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{25+49}} = \frac{-6}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{74}} = -0,156, \text{ dvs. } v = 98,97^\circ$$

Vi konkluderer med den spidse vinkel:

Den spidse vinkel mellem l og m er $u = 180^\circ - 98,97^\circ = 81,03^\circ$

Man kan også som tidligere beskrevet benytte et værktøjsprogram's indbyggede faciliteter til bestemmelse af skalarprodukt og længde.

Metode 2: 2D-geometriprogram

Vi bestemmer to punkter på hver af linjerne og konstruerer disse. Det kan være følgende:

For m :

$t=0$ giver punktet $P_1(8,3)$

$t=4$ giver punktet $P_2(0,7)$

For l :

$x=0$ giver $y = -\frac{17}{5} = -3,4$, dvs. punktet $P_3(0,-3,4)$

$x=1$ giver $y = -2$, dvs. punktet $P_4(1,-2)$

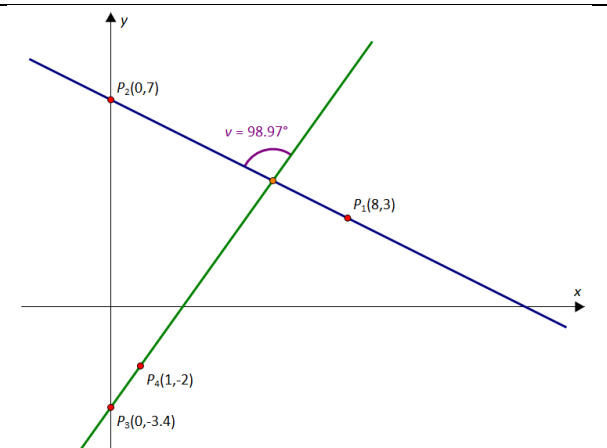
Kontroller beregningerne!

Vi plottes punkterne ind og bestemmer skæringspunktet med en indbygget kommando i programmet

Vi konkluderer med den spidse vinkel:

Den spidse vinkel mellem l og m er

$$u = 180^\circ - 98,97^\circ = 81,03^\circ$$



Figur 122z

Øvelse 5.80

Gør rede for, at linjerne nedenfor ikke er parallelle, og bestem vinklen mellem dem. Vælg selv metode.

a) $m: 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 = 0$ og $l: 5 \cdot x - 7 \cdot y - 3 = 0$

b) $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$ og $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

c) $m: 3 \cdot x - 5 \cdot y + 12 = 0$ og $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Øvelse 5.81 Vinklen mellem linjer i rummet

To rette linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne:

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \text{ og } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Det oplyses, at linjerne ligger i samme plan i rummet, dvs. de skærer hinanden.

Bestem vinklen mellem de to linjer. Vælg selv metode.

Eksempel: Vinkel mellem linje og plan i rummet

Vi vil bestemme vinklen v mellem planen med ligningen

$$\alpha: 3 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0$$

og linjen med parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Metode 1: Værktøjsprogram

Vi aflæser:

$$\text{Planens normalvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Linjens retningsvektor: } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi udregner vinklen u imellem dem med skalarproduktformlen:

$$\cos(u) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} = \frac{21}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{30}} = 0,712$$

$$\text{dvs. } u = 44,60^\circ$$

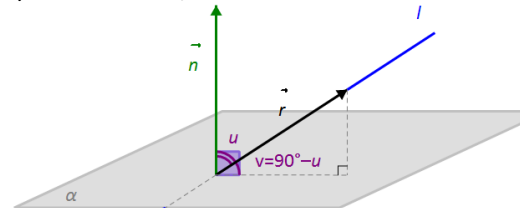
(Vi er altså i tilfælde nr. 1)

Konklusion:

Vinklen mellem linjen og planen er $v = 90^\circ - 44,60^\circ = 45,40^\circ$.

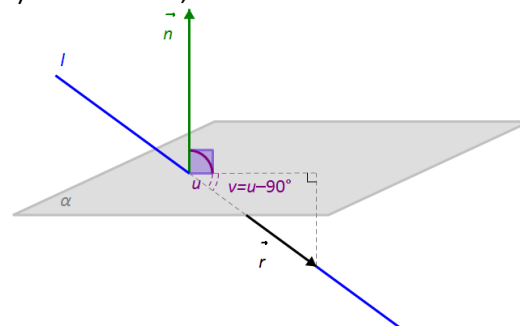
Der kan være to forskellige situationer.

1) Hvis $u < 90^\circ$, så er $v = 90^\circ - u$:



Figur 9

2) Hvis $u > 90^\circ$, så er $v = u - 90^\circ$:



Figur 10

Metode 2: Konstruktion i 3D-geometriprogram

Vi kan også bestemme vinklen mellem linje og plan i et 3D-geometriprogram. Her beregner man først to punkter på linjen og tre punkter på planen, som vi kan bruge til at konstruere objekterne ud fra. Vi bestemmer to tilfældige punkter på linjen:

$$t=0: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ hvilket giver punktet } P_1(1, -5, 5)$$

$$t = -1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hvilket giver punktet } P_2(0,0,3)$$

Vi bestemmer tre tilfældige punkter i planen:

$$x=0 \text{ og } y=0: 0-0+4 \cdot z-12=0 \text{ dvs. } z=3,$$

hvilket giver punktet $P_3(0,0,3)$

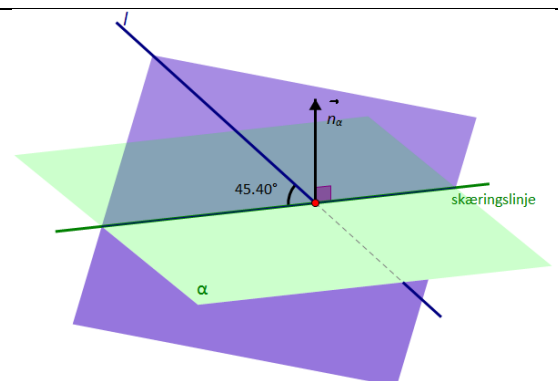
$$x=0 \text{ og } z=0: 0-2 \cdot y+0-12=0 \text{ dvs. } y=-6,$$

hvilket giver punktet $P_4(0,-6,0)$

$$y=0 \text{ og } z=0: 3 \cdot x-0+0-12=0 \text{ dvs. } x=4,$$

hvilket giver punktet $P_5(4,0,0)$

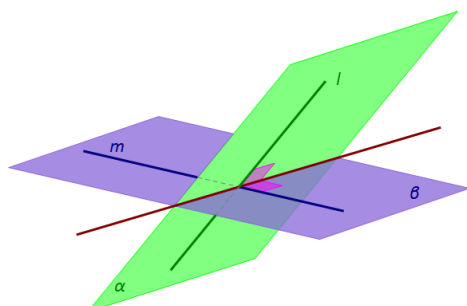
Vi plotter punkterne ind og konstruerer objekterne. Vi konstruerer en normalvektor til planen samt den plan der indeholder normalvektoren og linjen. Herefter kan vinklen mellem linjen og planen bestemmes, som vinklen mellem linjen og de to planers skæringskurve (linje).



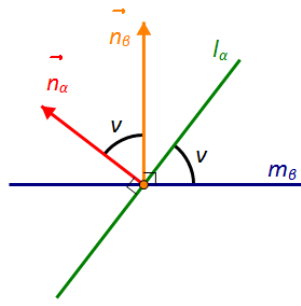
Figur 124a

Toplansvinkler

I rummet vil to ikke-parallelle planer altid skære hinanden, og deres skæringskurve er en ret linje. Vinklen mellem to planer kaldes en toplansvinkel. I hver af de to planer kan vi finde en linje, der står vinkelret på planernes skæringslinje, og toplansvinklen er bestemt ved vinklen mellem disse linjer. Denne vinkel er den samme som vinklen mellem de to planers normalvektorer, fordi hvis vi drejer vinklen mellem planerne 90° , så falder den sammen med vinklen mellem normalvektorerne.



Figur 11



Figur 12

Det betyder specielt, at to planer er ortogonale, netop når skalarproduktet af deres normalvektorer er nul, dvs. når $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$.

Der findes således både en spids og en stump toplansvinkel, hvor summen af disse er 180° . Toplansvinkler er særligt interessante, når vi regner på rumlige figurer, som fx polyedre og bygninger osv.

Eksempel: Vinkel mellem planer

Bestem vinklen mellem de to planer, givet ved ligningerne:

$$\alpha: 2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z + 5 = 0$$

$$\beta: 3 \cdot x + 5 \cdot y + 8 \cdot z - 12 = 0$$

Metode 1: Værktøjsprogram

Det fremgår ikke umiddelbart af ligningerne, hvordan planernes indbyrdes beliggenhed er eller hvilken vej normalvektorerne peger. Imidlertid er vi ikke mere interesseret i den spidse frem for den stump vinkel i sådanne tilfælde, så vi aflæser blot normalvektorenes koordinatsæt og bestemmer toplansvinklen derud fra:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

og dermed er:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{-20}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{98}} = 0,188 \text{ dvs. } v = 79,19^\circ$$

Konklusion: Den spidse vinkel mellem α og β er altså $79,19^\circ$, mens den stumpe er $100,81^\circ$.

Metode 2: Konstruktion i 3D-geometriprogram

Prøv selv efter følgende retningslinjer: Bestem tre punkter i hver af de tre planer ved at sætte koordinaterne parvist lig med nul, og udregn den tredje koordinat. Konstruer planerne i et 3D-geometri program. Konstruer en vinkelret linje (svarende til normalvektorerne) på hver af de to planer, og bestem vinkel mellem disse ved hjælp af en indbygget kommando i programmet.

Øvelse 5.1

Bestem vinklen mellem de to planer givet ved ligningerne:

$$\alpha: 6 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot z + 9 = 0$$

$$\beta: 3 \cdot x - 2 \cdot y + 8 \cdot z - 4 = 0$$

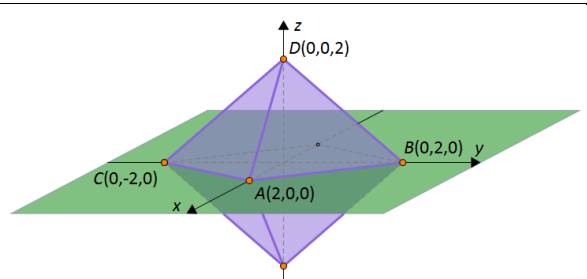
Eksempel: Toplansvinkler

Vi vil bestemme de indre toplansvinkler mellem sidefladerne i det regulære oktaeder vist på figuren.

Metode 1: Værktøjsprogram

Vi bestemmer en normalvektor til den plan, der indeholder trekant ABD. Vi vælger to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Figur 13

Krydser vi dem i nævnte rækkefølge, så får vi en normalvektor, der peger ind i oktaederet (højresystem!):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dvs. vi kan bruge } \vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi vælger derfor på samme måde vektorer, der udspænder planen, der indeholder trekant ACD, således, at normalvektoren her også peger ind i oktaederet. Dvs. hvis vi vælger $\overrightarrow{AD}$, så skal vi vælge $\overrightarrow{AC}$ i nævnte rækkefølge, for at få det rigtige højresystem, og vi får så:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dvs. vi kan bruge } \vec{n}_{ACD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at vi skal bevare retningen, når vi forkorter, dvs. vi må ikke forkorte med en negativ faktor!

Vi bestemmer vinklen imellem de to normalvektorer

$$\cos(v) = \frac{\vec{n}_{ABD} \cdot \vec{n}_{ACD}}{|\vec{n}_{ABD}| \cdot |\vec{n}_{ACD}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \text{ dvs. } v = 70,53^\circ$$

Altså er toplansvinklen i et regulært tetraeder $70,53^\circ$.

Metode 1: 3D-geometriprogram

Konstruer oktaederet, og konstruer en vinkelret linje på hver af de to sideflader ABD og ACD. Bestem vinkel mellem disse ved hjælp af en indbygget kommando i programmet.

Øvelse 5.83 Eksamensopgave

Billedet viser et tårn med et ottekantet spir. Figuren viser en model af spiret indtegnet i et koordinatsystem med enheden 1 cm. Nogle af spirets samlepunkter er angivet på figuren.

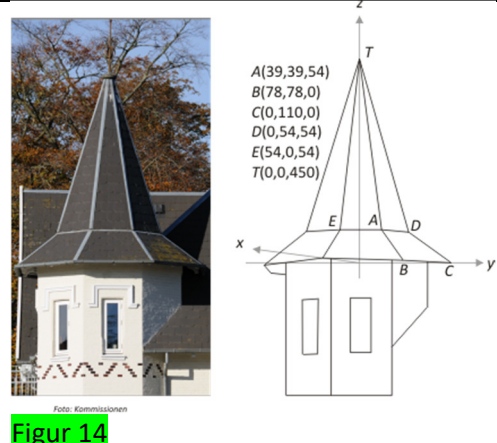
- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder tagfladen $ABCD$.

Det oplyses, at en ligning for den plan β , der indeholder tagfladen ADT er givet ved

$$110 \cdot x + 286 \cdot y + 39 \cdot z = 17550$$

- b) Bestem vinklen (ydre) mellem tagfladerne $ABCD$ og ADT .
c) Bestem vinklen (indre) mellem tagfladerne AET og ADT .

(Baseret på Eksamensopgave, STX-net-matematik, 240511)



Figur 14

Opgaver

På [hjemmesiden](#) ligger opgaver i tilknytning til afsnit 9.

10. Skæring mellem objekter i plan og rum

Vi vil beskrive en generel metode til at bestemme skæringspunkter mellem forskellige objekter i plan og rum. Princippet i metoden er: Løsning af flere ligninger med flere ubekendte evt. ved substitution.

Kender vi fx en parameterfremstilling for en linje, så indsætter vi koordinatsættet til denne i ligningen for det andet objekt (substitution) og bestemmer derved parameterværdien i skæringspunkt, som derefter indsættes i linjens parameterfremstilling, så man får koordinatsættet til skæringspunkterne.

Eksempel: Skæring mellem linje og cirkel i planen

En ret linje l og en cirkel $\mathcal{C}$ i planen er givet ved ligninger:

$$l: 3 \cdot x - y - 10 = 0 \quad \text{og} \quad \mathcal{C}: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

Bestem skæringspunkterne mellem linjen og cirklen.

Metode 1: Håndregning

Vi isolerer y i linjens ligning: $y = 3 \cdot x - 10$, og indsætter det fundne udtryk for y i cirkelligningen:

$$(x - 2)^2 + ((3 \cdot x - 10) - 1)^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (3 \cdot x - 11)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 4 \cdot x + 4 + 9 \cdot x^2 - 66 \cdot x + 121 = 25$$

$$10 \cdot x^2 - 70 \cdot x + 120 = 0$$

$$x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0$$

Vi løser andengradsligningen med løsningsformlen, hvor diskriminanten er:

$$d = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

dvs. der er to løsninger – altså skærer linjen cirklen to steder.

Vi bestemmer x -koordinaten i skæringspunkterne:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \quad \text{dvs. } x = 2 \text{ eller } x = 5$$

Vi bestemmer de tilhørende y -koordinater ved indsættelse af de fundne x -koordinater i $y = 3 \cdot x - 10$: For $x = 2$:

$$y = 3 \cdot 2 - 10 = 6 - 10 = -4$$

$$\text{For } x = 5: y = 3 \cdot 5 - 10 = 15 - 10 = 5$$

Konklusion: Linjen skærer cirklen i to punkter, og disse har koordinatsættene: $(2, -4)$ og $(5, 5)$.

Metode 2: Værktøjsprogram

Vi løser ligningssystemet:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

$$3 \cdot x - y - 10 = 0$$

med en solvekommando:

$$\text{solve}((x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2 \text{ and } 3 \cdot x - y - 10 = 0, x, y) \triangleright x=2 \text{ and } y=-4 \text{ or } x=5 \text{ and } y=5$$

Konklusion: Linjen skærer cirklen i to punkter, og disse har koordinatsættene: $(2, -4)$ og $(5, 5)$.

Metode 3: 2D-geometriprogram

Vi konstruerer cirklen ud fra centrum $C(2,1)$ og radius $r=5$.

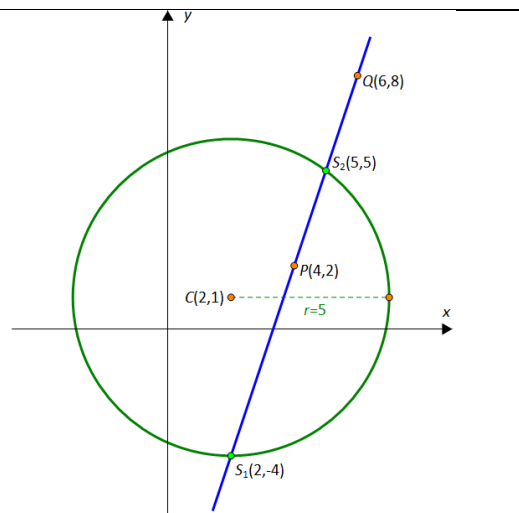
Vi bestemmer to tilfældige punkter på den rette linje:

$x=4$ giver $y=2$, dvs. punktet $P(4,2)$

$x=6$ giver $y=8$, dvs. punktet $Q(6,8)$

Vi konstruerer den rette linje ud fra de to punkter, og benytter programmets indbyggede kommando til at bestemme skæringspunkterne.

Konklusion: Linjen skærer cirklen i to punkter, og disse har koordinatsættene: $(2, -4)$ og $(5, 5)$.



Figur 15

Bemærk, at de tre metoder er sidestillede, og at vi kan anvende præcis de samme metoder, når der er tale om lignende problemstillinger med rumlige objekter, hvor metode 3 så naturligvis foregår i et 3D-geometriprogram.

Praxis: Skæringspunkter mellem linjer og andre objekter i plan og rum

Beskriv problemet ved et ligningssystem. Indgår der en parameter i beskrivelsen af et eller flere objekter, så bestemmer man først parameteren i skæringspunktet, og derefter kan koordinatsættet til skæringspunktet bestemmes ved indsættelse af den fundne parameterværdi i en af objekternes parameterfremstillinger.

Praxis: Skæringspunkt ved konstruktion i et 2D- eller 3D-geometriprogram:

Objekterne konstrueres efter de tidligere nævnte anvisninger, og derefter benyttes programmets indbyggede kommando til bestemmelse af skæringspunkter.

Øvelse 5.84 Skæring mellem linjer i planen

To rette linjer i planen er givet ved:

$$l: 6 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0 \text{ og } m: -4 \cdot x + 5 \cdot y + 8 = 0$$

Bestem de to linjers skæringspunkt. Vælg selv metode.

Øvelse 5.85 Skæring mellem linjer i rummet

To rette linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne:

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \text{ og } l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Undersøg om linjerne skærer hinanden og i bekræftende fald bestem skæringspunktet.

Bemærk. Normalt har tre ligninger med to ubekendte ingen løsning. Det svarer geometrisk til, at normalt skærer linjer ikke hinanden i rummet. Hvis ligningssystemet har en løsning, så er det påvist, at de skærer hinanden. Dette kan løses ved først at se på to af koordinaterne, og så undersøge om de fundne parameterværdier også passer ind i tredje koordinat. Eller man kan opstille de tre ligninger. Det er vigtigt, at de to parametre gives forskellige navne.

Øvelse 5.86 Skæring mellem linje og kugle i rummet

En ret linje og en kugle i rummet er givet ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+7 \cdot s \\ 6+10 \cdot s \\ 5+2 \cdot s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

Bestem linjens eventuelle skæringspunkter med kuglen både ved konstruktion i et 3D-geometriprogram og ved brug af et værktøjsprogram.

En ret linje og en plan i rummet (der ikke er parallelle) vil altid have et skæringspunkt, og dette bestemmes ved samme metode. Man skal dog lige huske at gøre rede for, at linjen og planen rent faktisk ikke er parallelle! En linje og en plan er parallelle, netop når linjens retningsvektor og planens normalvektor er ortogonale, dvs. vi kan påvise at en linje og en plan ikke er parallelle ved at vise, at skalarproduktet af disse to vektorer er forskelligt fra nul.

Eksempel: Påvise parallelitet

Planen α og linjen m er givet ved nedenstående ligning og parameterfremstilling.

Undersøg om de er parallelle.

$$\alpha: 3 \cdot x - 6 \cdot y + 2 \cdot z - 8 = 0$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Vi udregner skalarproduktet af planens normal vektor og linjens retningsvektor:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -21 \neq 0$$

Konklusion: Linjen og planen er ikke parallelle.

Øvelse 5.87

Bestem skæringspunktet mellem linjen og planen i eksemplet ved at løse 4 ligninger med 4 ubekendte i et værktøjsprogram. Kontroller resultatet ved konstruktion, hvis du har et 3D-geometriprogram.

Øvelse 5.88 Projektion af et punkt ned på en plan

En plan α har ligningen $-4 \cdot x + 9 \cdot y - 2 \cdot z + 5 = 0$ og et punkt i rummet har koordinatsættet $Q(14, -24, 18)$.

- Bestem Q 's projektion i planen, dvs. bestem skæringspunktet mellem planen og den rette linje, der står vinkelret på planen og går gennem punktet Q .
- Kontroller resultatet ved konstruktion og efterfølgende aflæsning, hvis du har et 3D-geometriprogram

Et andet punkt i rummet har koordinatsættet $P(2, 4, 3)$, og den rette linje m har $\overrightarrow{PQ}$, som retningsvektor.

- Bestem en parameterfremstilling for sporet af m i α .
- Konstruer sporet i planen α og kontroller resultatet i c), hvis du har et 3D-geometriprogram.

Øvelse 5.89 Skæringspunkt mellem akse og objekt

En plan α har ligningen $2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z + 12 = 0$.

Bestem koordinatsættene til planens skæringspunkter med akserne ved at udnytte, at når man befinder sig på en af akserne, så er de øvrige koordinater nul.

Eksempel: Skæring mellem to planer i rummet (supplerende stof)

I rummet vil to ikke-parallelle planer α og β altid skære hinanden, og deres skæringskurve er en ret linje l . Begge planers normalvektorer $\vec{n}_\alpha$ og $\vec{n}_\beta$ vil være vinkelrette på skæringslinjen, og derfor er krydsproduktet af de to normalvektorer en retningsvektor for skæringslinjen, dvs. $\vec{r}_l = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$. Bemærk, at hvis planerne havde været parallelle, så ville krydsproduktet være nul. Vi mangler således blot et punkt på linjen før vi kan opskrive en

parameterfremstilling for l . Vi kan fx vælge det punkt, der har z -koordinaten 0, dvs. $P_0(x_0, y_0, 0)$, og sætter vi $z = 0$ i de to planers ligninger, så kan vi bestemme x_0 og y_0 ved at løse det ligningssystem, der opstår, i x og y .

Man kan også gøre det i én beregning. Det illustrerer vi med følgende eksempel:

Bestem skæringslinjen mellem følgende de to planer, der har ligningerne:

$$\alpha: 2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z = 8$$

$$\beta: 2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 2$$

Sæt $z = t$ og flytter disse led over på den anden side af lighedstegnet:

$$\alpha: 2 \cdot x - 3 \cdot y = 8 - 4 \cdot t$$

$$\beta: 2 \cdot x + 3 \cdot y = 2 + t$$

Løs ligningssystemet mht. x og y i et værktøjsprogram:

$$x = 2,5 - 0,75 \cdot t \text{ og } y = -1 + 0,83 \cdot t$$

Da $z = t$ har vi altså fundet følgende parameterfremstilling for skæringslinjen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 - 0,75 \cdot t \\ -1 + 0,83 \cdot t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0,83 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Øvelse 5.90

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem de to planer α og β givet ved:

$$\alpha: 2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 \cdot z - 2 = 0 \quad \text{og} \quad \beta: x + y - 2 \cdot z - 1 = 0$$

Opgaver

På [hjemmesiden](#) ligger opgaver i tilknytning til afsnit 10.

11. Afstande i plan og rum

Vi vil i dette afsnit udlede en række formler til afstandsbestemmelse i plan og rum. Når vi generelt taler om afstandsbestemmelse, er det underforstået, at vi ønsker at bestemme den korteste afstand mellem to objekter, altså den vinkelrette afstand.

Vi har set, at linjens ligning i 2D og planens ligning i 3D er helt analoge. Tilsvarende er metoderne til at bestemme afstanden fra et punkt til en linje (i 2D) eller afstanden fra et punkt til en plan (i 3D) helt analoge. Der gælder følgende sætning om afstandsbestemmelse i planen:

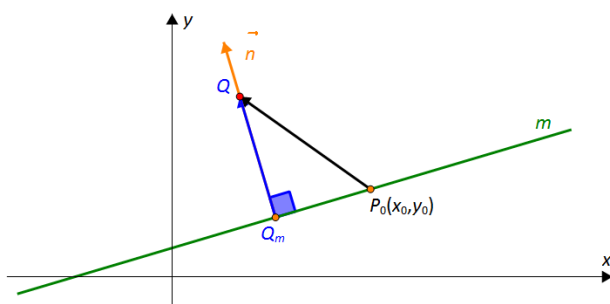
Sætning 10: Afstand fra Punkt til linje i planen

Afstanden fra et punkt $Q(x_1, y_1)$ til en linje m med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ kan beregnes ved:

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{"dist" står for distance. Man læser det blot som det står})$$

Bevis:

Linjen m har normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Vi lader $P_0(x_0, y_0)$ betegne et fast punkt på m . På figuren har vi afsat normalvektoren ud fra Q , og vi har konstrueret vektoren $\overrightarrow{P_0Q}$.



Figur 16

Afstanden fra Q til m er da givet ved længden af $\overrightarrow{P_0Q}$'s projektion på normalvektoren, dvs. længden af $\overrightarrow{Q_mQ}$ på figuren. Ved indsættelse i projektionsformlen får vi:

$$\text{dist}(Q, m) = |\overrightarrow{Q_mQ}| = |\overrightarrow{P_0Q_{\bar{n}}}| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}$$

$\overrightarrow{P_0Q}$'s projektion på $\bar{n}$

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Indsæt koordinater og anvend længdeformel

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{|a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot (y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Udregn skalarprodukt

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + (-a \cdot x_0 - b \cdot y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Udregn parenteser og saml konstanter

Da $P_0(x_0, y_0)$ ligger på m , passer P_0 ind i linjens ligning, dvs. $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$, altså er $c = -a \cdot x_0 - b \cdot y_0$. Vi får således den søgte formel:

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

<bevis slut>

Helt analogt til sætningen ovenfor gælder der følgende sætning i rummet:

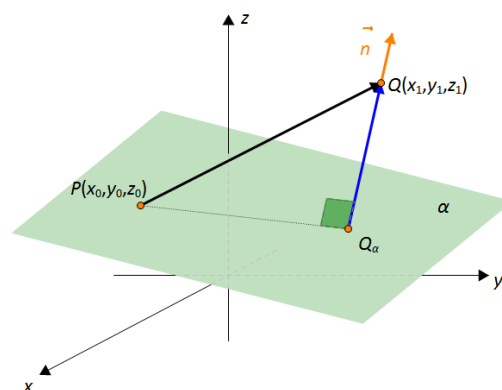
Sætning 11: Afstand fra Punkt til plan i rummet

Afstanden fra et punkt $Q(x_1, y_1, z_1)$ til en plan α med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ kan beregnes ved:

$$\text{dist}(Q, m) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Øvelse 5.91 Bevis for sætning 24

Bevis sætningen efter samme principper som beviset for afstanden fra punkt til linje i planen, idet du anvender figuren i dine betragtninger. På figuren betegner $\bar{n}$ normalvektoren til α , P_0 et fast punkt, som vi ved ligger i α , og $\overrightarrow{Q_{\alpha}Q}$ er $\overrightarrow{P_0Q}$'s projektion ind på $\bar{n}$.



Figur 17

Praxis: Afstand fra punkt Q til linje/plan i et værktøjsprogram

Aflæs linjens/planens normalvektor $\bar{n}$ af ligningen for linjen/planen, og bestem et tilfældigt punkt P_0 på linjen/i planen (fx et skæringspunkt med en af akserne).

Definer normalvektoren $\bar{n}$ samt stedvektorerne: $\overrightarrow{OP_0}$ og $\overrightarrow{OQ}$, og beregn forbindelsesvektoren: $\overrightarrow{P_0Q}$.

Udregn afstanden $d = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}$ med kommandoen: $d := \frac{\text{abs}(\text{dot}(\overrightarrow{P_0Q}, \bar{n}))}{\text{norm}(\bar{n})}$.

Praxis: Afstand fra punkt Q til linje/plan i et 2D/3D-geometriprogram

Konstruer de aktuelle objekter samt punktet Q , og konstruer en ret linje vinkelret på objektet gennem Q . Bestem skæringspunktet mellem den vinkelrette linje og objektet, og bestem afstanden mellem skæringspunkterne med en indbygget kommando i programmet.

Øvelse 5.92 Afstand mellem parallelle linjer/planer

En plan α i rummet har ligningen $2 \cdot x + 6 \cdot y - 5 \cdot z + 3 = 0$.

a) Bestem afstanden fra punktet $Q(4, 5, 2)$.

En anden plan β i rummet har ligningen $-4 \cdot x - 12 \cdot y + 10 \cdot z - 70 = 0$.

b) Vis, at α og β er parallelle

c) Bestem afstanden mellem de to planer som afstanden fra et punkt på den ene til den anden plan.

d) Kontroller resultaterne ved konstruktion og efterfølgende aflæsning, hvis du har et 3D-geometriprogram

Bemærk, at den samme metode kan anvendes til at bestemme afstanden til en linje parallel med en plan i rummet og til bestemmelse af afstanden mellem to parallelle linjer i planen.

Øvelse 5.93 Er en linje tangent til en cirkel?

En ret linje og en cirkel er givet ved ligningerne:

$$3 \cdot x - 4 \cdot y = 15$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

a) Undersøg, om linjen rører (er tangent), skærer eller ligger uden for cirklen med ligningen, idet du bestemmer afstanden fra linjen til cirkelns centrum og sammenligner den fundne afstand med cirkelns radius. Hvad kan du konkludere?

b) Kontroller resultaterne ved konstruktion og efterfølgende aflæsning, hvis du har et geometriprogram.

Øvelse 5.94 Er en linje tangent til en kugle

Undersøg om linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

er tangent til kuglen med centrum i $C(2, 6, -7)$ og radius 5. Vælg selv metode.

Øvelse 5.95 En kugle med en given tangentplan

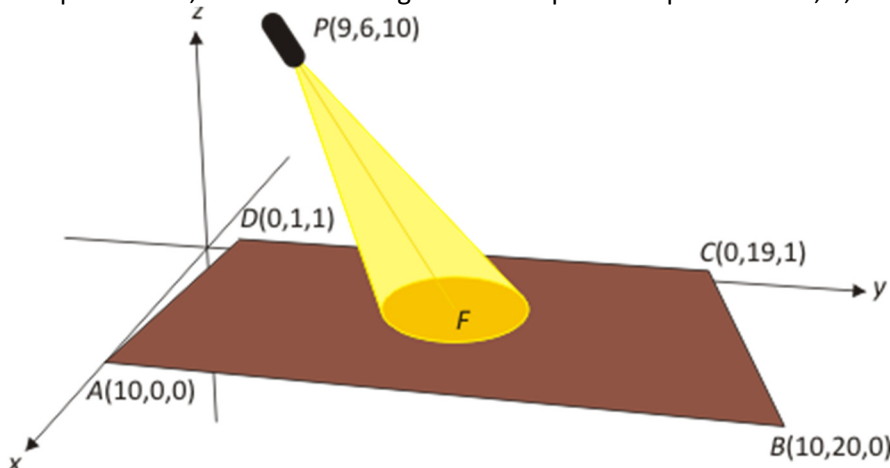
En plan α har ligningen $2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 \cdot z + 8 = 0$.

a) Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i $C(6, -1, -5)$ og har α som tangentplan

b) Løs opgaven ved konstruktion og efterfølgende aflæsning, hvis du har et 3D-geometriprogram

Øvelse 5.96 Eksamensopgave

På figuren ses en model af en skrå teaterscene indlagt i et koordinatsystem med enheden 1 m på akserne, således at scenegulvet er udspændt af punkterne A , B , C og D .



Figur 18

Opgaven kan løses både ved konstruktion og aflæsning samt ved beregning. Metoderne er ligestillede ved besvarelse af en eksamensopgave – overvej, hvilken du foretrækker

a) Bestem en ligning for den plan α , som scenegulvet er en del af.

I punktet $P(9,6,10)$ er der ophængt en projektør. Centrum af projektørens lysstråle kan i modellen beskrives ved en del af linjen l med parameterfremstillingen

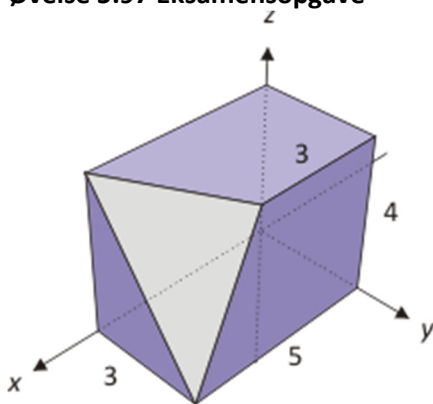
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestem projektørens vinkelrette højde over scenen.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt F , hvori centrum af lysstrålen rammer scenegulvet.

(Baseret på Eksamensopgave, stx-A-matematik-net, 250512)

Øvelse 5.97 Eksamensopgave



Figur 132a

Af en klods med sidelængderne 3 m, 4 m og 5 m afskæres et hjørne. På figuren ses en model af klodsen indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på alle akser.

a) Bestem arealet af snitfladen.

b) Bestem afstanden fra snitfladen til det modstående hjørne.

(Eksamensopgave, stx-A-matematik-net, 310512)

Eksempel: Løsning af vektorligninger med determinantmetoden

Når vi løser flere lineære ligninger med flere ubekendte fx 2 ligninger med 2 ubekendte svarer det til at løse en vektorligning. Ser vi fx på

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

så kan vi definere vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ og dermed skrive ligningen således:

$$\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$$

Løsningen til ligningssystemet kan findes ved vektorregning. Først "prikkes" ligningen med $\hat{b}$, så y -leddet forsvinder, og vi dermed kan isolere x . Dernæst "prikkes" ligningen med $\hat{a}$, så x -leddet forsvinder:

Vi "prikkes" ligningen med $\hat{b}$, så y -leddet forsvinder, og vi kan isolere x :

$$\hat{b} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

Vi "prikkes" ligningen med $\hat{a}$, så x -leddet forsvinder, og vi kan isolere y :

$$\hat{a} \cdot (\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y) = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{a} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{a} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{b} \cdot \vec{a} \cdot x + \hat{b} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{a} \cdot \vec{b} \cdot y = \hat{a} \cdot \vec{c}$$

$$\hat{b} \cdot \vec{a} \cdot x = \hat{b} \cdot \vec{c}$$

$$x = \frac{\hat{b} \cdot \vec{c}}{\hat{b} \cdot \vec{a}} = \frac{\det(\vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{b}, \vec{a})} = \frac{-\det(\vec{c}, \vec{b})}{-\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{\hat{a} \cdot \vec{c}}{\hat{a} \cdot \vec{b}} = \frac{\det(\vec{a}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Her har vi udnyttet, at: $\det(\vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{c}, \vec{b})$ og $\det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$.

Bemærk også, at vi har antaget $D \neq 0$. Dette kommenteres i en øvelse nedenfor.

Vi benævner determinanten i tælleren svarende til den af de ubekendte vi ønsker at bestemme, her henholdsvis D_x og D_y . Bemærk, at D_x fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på x-koefficienternes plads, mens D_y fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på y-koefficienternes plads. Determinanten i begge nævnere er den samme, nemlig $D = \det(\vec{a}, \vec{b})$. Man kalder denne for *ligningssystemets determinant*.

Vi samler resultatet i følgende sætning:

Sætning 25: Løsning af vektorligninger med determinantmetoden

Vektorligningen $\vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y = \vec{c}$, hvor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ er egentlige vektorer i planen, har præcis én løsning, når *ligningssystemets determinant* $D \neq 0$. Løsningen er i så fald:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right), \text{ hvor } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ og } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Hvis $D = 0$ har ligningssystemet enten ingen eller uendeligt mange løsninger.

Øvelse 5.99 Situationen med $D = 0$

a) Vis, at hvis et ligningssystems determinant $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, så er også $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

b) Udnyt a) til at vise, at hvis $D = 0$, så er de linjer, som ligningerne fremstiller, parallelle.

c) Argumenter for sætningens sidste påstand, og giv en geometrisk tolkning af de to muligheder.

Vi løser ligningssystemet ovenfor ved hjælp af determinanter:

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 6$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

hvor vi har:

$$D_x = \det(\vec{c}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 18 - (-36) = 54 \quad \text{og} \quad D_y = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36$$

$$D = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - (-6) = 18$$

Altså får vi:

$$(x, y) = \left(\frac{54}{18}, \frac{36}{18} \right) = (3, 2)$$

Systemer af ligninger med flere ubekendte kan således opfattes som vektorligninger

Øvelse 5.100

Løs ligningssystemet ved determinantmetoden:

$$2 \cdot x + 5 \cdot y + 2 = 0$$

$$3 \cdot x - 4 \cdot y - 20 = 0$$

Eksempel: Rumprodukt og determinanter af højere orden

Vi har mødt to forskellige produkttyper af vektorer i rummet, hvor det ene (skalarproduktet) resulterer i en skalar, mens det andet (vektorproduktet/krydsproduktet) resulterer i en vektor. Beregner vi de blandede produkter af tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, så får vi en skalar: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ og $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Ved hjælp af disse blandede produkter kan vi generalisere determinantbegrebet til 3 dimensioner. Vi udregner skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Byt rundt i determinanterne

Højre side definerer vi nu som en *determinant af 3. orden*:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ved at udregne de samlede udtryk, kan man vise, at $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Dette kaldes *rumproduktet* af de tre vektorer i rummet $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$:

Definition 12: Rumprodukt af tre vektorer i rummet

Rumproduktet af tre vektorer i rummet $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er defineret ved:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Øvelse 5.101

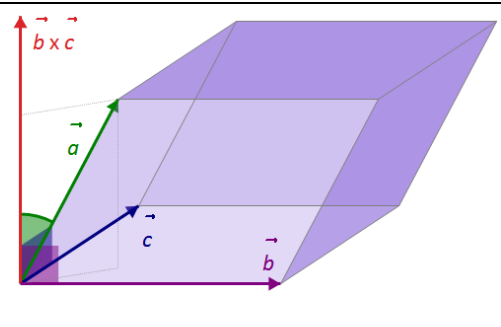
Vis, at rumproduktet af de tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ er lig med 306, dvs:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 306$$

<kan vi tegne dette parallelepipedum? Det kunne også støtte forråelsen af sjattedelen nedenfor>

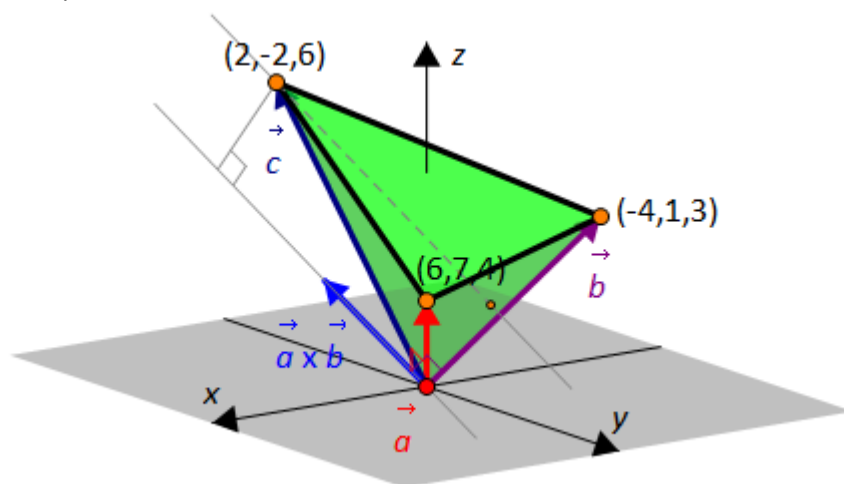
Determinanten af et vektorpar er (numerisk) lig med arealet af det parallelogram, som vektorerne udspænder i planen.

Vi viser nedenfor, at en determinant af 3. orden (numerisk) er lig med rumfanget af det parallelepipedum ("skæv kasse"), som de tre søjlevektorer udspænder i rummet. Ligger vektorerne i højrestilling, som vist på figuren, ligger alle tre vektorer på samme side af den plan, der udspændt af $\vec{c}$ og $\vec{b}$. Altså er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b} \times \vec{c}$ spids, og dermed er skalarproduktet af de to vektorer $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ positivt. Omvendt gælder det, at $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ er negativt, hvis de tre vektorer ligger i venstrestilling.



Er $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, så er $\vec{a} \perp \vec{b} \times \vec{c}$, dvs. de tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ ligger i samme plan og er således lineært afhængige. I dette tilfælde udspænder de ikke et parallelepipedum.

De tre vektorer ovenfor udspænder også et tetraeder, og vi vil nu vise, hvordan tetraederets rumfang fremkommer af rumproduktet.



Figur 19

Arealet $A_{\text{Grundflade}}$ af tetraederets grundflade udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ifølge definitionen på krydsproduktet bestemt ved $\frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$. Tetraederets højde h , dvs. den vinkelrette afstand fra $\vec{c}$'s slutpunkt til grundfladen, er bestemt ved længden af $\vec{c}$'s projektion ind på $\vec{a} \times \vec{b}$ (som jo står vinkelret på grundfladen), dvs.

$$h = |\vec{c}_{\vec{a} \times \vec{b}}| = \frac{|\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Et tetraeders rumfang er bestemt ved $V_{\text{tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_{\text{Grundflade}}$. Altså får vi:

$$V_{\text{tetraeder}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A_{\text{Grundflade}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{6} \cdot |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \frac{1}{6} \cdot |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

dvs. tetraederrumfanget er en sjettedel af rumproduktet!

Bemærk, at vi undervejs også fik udledt formlen for rumfanget af det parallelepipedum, vektorerne udspænder. Her er grundfladens areal jo $A_{\text{Grundflade}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$, og rumfanget er $V_{\text{parallelepipedum}} = h \cdot A_{\text{Grundflade}}$. Dvs det er samme udregning, bortset fra brøkerne!

For vores tetraeder får vi nu ifølge øvelsen:

$$V_{\text{tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} \cdot 306 = 51$$